

***UNIDAD DIDÁCTICA:***  
***INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO FORMAL***  
***DE LA PROBABILIDAD***  
***2ºCURSO DE BACHILLERATO***


Máster Universitario de Profesorado de Educación  
Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación  
Profesional y Enseñanza de Idiomas


(Esp: Matemáticas)

UNIVERSIDAD DE GRANADA

***CURSO 2010/2011***

Trabajo fin de máster elaborado por:  
D<sup>a</sup> Inmaculada Vargas Herrera.  
Bajo la supervisión de: D. Luis Rico Romero.

  
Firma alumna  
Inmaculada Vargas Herrera

  
Vº Bº Tutor  
Luis Ríos Romero

# Índice

✘. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	PÁG. 5
✘ ANÁLISIS DE CONTENIDO:	PÁG. 7
1.1 Desarrollo histórico del tema.	7
1.2 Estructura conceptual.	12
1.3 Sistemas de representación.	14
1.4 Fenomenología del tema y modelización.	14
1.5 Contenidos específicos de la unidad didáctica.	15
✘ ANÁLISIS COGNITIVO:	PÁG. 22
2.1 Expectativas que se esperan desarrollar.	22
2.2 Ejemplificación de tareas desde los objetivos y las competencias.	25
2.3 Errores y dificultades posibles en el desarrollo de la unidad didáctica.	25
✘ Análisis de instrucción:	PÁG.27
3.1 Grados de complejidad de las tareas.	27
3.2 Recursos y materiales didácticos.	28
3.3 Secuenciación y organización de las tareas de la unidad didáctica. Gestión del aula.	29
✘ DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA:	PÁG. 30
SESIÓN 1: Introducción al espacio muestral. La probabilidad como límite.	30
SESIÓN 2: Regla de Laplace. Probabilidad de la unión.	34
SESIÓN 3: Probabilidad del suceso contrario. Algunas representaciones gráficas: probabilidad como área y diagramas de Venn.	38
SESIÓN 4: Probabilidad compuesta. Diagramas de árbol.	42
SESIÓN 5: Probabilidad condicionada. Tablas de contingencia.	46
SESIÓN 6: Repaso. Corrección del examen.	51
SESIÓN 7: Examen.	53
✘ EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES EN LA UNIDAD DIDÁCTICA:	PÁG.56

✕ ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	PÁG.57
✕ PROYECTO INDIVIDUAL	PÁG.58
✕ BIBLIOGRAFÍA:	PÁG.61
✕ ANEXOS:	
ANEXO I: RELACIÓN DE EJERCICIOS	PÁG.62
ANEXO II: ACTIVIDADES DE REFUERZO Y AMPLIACIÓN	PÁG. 63
ANEXO III: ALGUNAS DE LAS TAREA QUE INTERVIENEN EN LA UNIDAD DIDÁCTICA ANALIZADAS SEGÚN LOS INDICADORES USUALES	PÁG. 66
ANEXO IV: ANÁLISIS DEL PROYECTO INDIVIDUAL	PÁG. 71

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Se define el Currículo como “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas”. (LOE, Título preliminar, Capítulo III, Artículo 6)

La planificación del currículo escolar se realiza desde dos niveles de responsabilidad; el primero a nivel político y administrativo, que le corresponde al Estado y a la comunidad autónoma, en este caso, Andalucía; y el segundo a nivel profesional que le corresponde a la administración educativa y a mí como futuro docente. En otras palabras, el Estado y el Parlamento andaluz deciden en la redacción de leyes qué elementos conceptuales y culturales deben ser objeto de trabajo escolar y los docentes debemos decidir de qué manera vamos a trabajar en nuestros centros y aulas dichos elementos. (LOE, Título V, Capítulo II, Artículo 120)

Los elementos básicos que integran el currículo sobre los que hay que tomar decisiones previas en una programación de la enseñanza son los siguientes:

0. *Objetivos y competencias básicas.* Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
1. *Contenidos.* Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
2. *Metodología.* Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
3. *Evaluación.* Proceso, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

Existen tres niveles de concreción curricular caracterizados por las tomas de decisiones sobre los elementos básicos del currículo –objetivos, competencias básicas en su caso, contenidos, secuencia, metodología y evaluación.

- *Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas.* Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado. Dado que las comunidades autónomas tienen competencias plenas en materia educativa, corresponde en Andalucía, por tanto, al parlamento andaluz, que elabora las leyes educativas básicas y a la administración educativa andaluza que las desarrolla mediante decretos y normas.
- *Proyecto educativo.* Es el segundo nivel de concreción. Corresponde al centro escolar, a su profesorado organizado en equipos educativos y departamentos didácticos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los órganos colegiados de control y gobierno del centro.
- *Programación de aula.* Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones (Cultural, Cognitiva, Formativa y Social) que a su vez se descomponen en cuatro niveles (Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico) (L. Rico).

Por tanto, esta unidad didáctica se ubica en el nivel de planificación para los profesores, tomando decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social).

La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, que consta de:

1. Análisis de contenido (Desarrollo histórico, Estructura Conceptual, Sistemas de Representación, Fenomenología y Contenidos específicos de la unidad didáctica).
2. Análisis cognitivo (Expectativas a desarrollar: objetivos y competencias, errores y dificultades).
3. Análisis de Instrucción (Grados de complejidad de las tareas, Diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos didácticos).
4. Análisis de la evaluación (Instrumentos y criterios de evaluación).

# ANÁLISIS DE CONTENIDO

## 1.1 Evolución histórica

La Edad media termina históricamente en el año 1453 con la caída de Constantinopla, dando paso a la etapa conocida como Renacimiento, la cual se destacó por la actividad mercantil, industrial, artística, arquitectónica, intelectual y científica, entre otras. En esta época surge una nueva relación del hombre con la naturaleza, que va unida a una concepción ideal y realista de la ciencia. La matemática se va a convertir en la principal ayuda de un arte y una sociedad que se preocupan incesantemente en fundamentar racionalmente su ideal de belleza.

A partir de esta etapa con el avance en las matemáticas y la filosofía, se empieza a dar una explicación coherente a muchos fenómenos que no seguían un patrón determinístico, sino aleatorio. Es el caso de todos los fenómenos relativos a la probabilidad de los sucesos, concretados en este tiempo fundamentalmente en los juegos de azar.

En este periodo del Renacimiento es cuando empiezan a surgir de manera más seria inquietudes entorno a contabilizar el número de posibles resultados de un dado lanzado varias veces, o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando el juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes surgían más como intentos de resolver problemas “cotidianos” con el fin de ser justos en las apuestas y repartos, incluso como interés de conocer las respuestas para obtener ventajas y en consecuencia mayores ganancias respecto a otros jugadores y mucho menos de inquietudes matemáticas verdaderas. De hecho la idea de modelizar el azar mediante las matemáticas aún no estaba plenamente presente en los intelectuales de la época.

([www.uam.es/personal.../Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf](http://www.uam.es/personal.../Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf))

Los orígenes de la probabilidad podrían ser datados en civilizaciones antiguas como la Asiria o la Sumeria, que ya hacían uso de instrumentos rudimentarios como astrágalos o tabas con el fin, de manera puramente intuitiva, de cuantificar lo incierto.

Un paso más hacia delante lo darían los egipcios. Se puede intuir el conocimiento probabilístico en pinturas encontradas en las paredes de las tumbas de los faraones, o el uso (por el siglo XVI antes de Cristo) de ingenios parecidos a dados. Con respecto a los dados y más en concreto a los juegos que se desarrollaron con estos cabría destacar su alto grado de perduración histórica, ya que desde los romanos hasta el Renacimiento se vinieron practicando ininterrumpidamente. Un dato curioso es el origen histórico y etimológico de la palabra Azar, se dice que es proveniente de “Hazard”, un juego introducido en la tercera cruzada que se jugaba con un hueso del pie, el astrágalo. (Libro: *Historia de la probabilidad*)

El motor del desarrollo histórico de la probabilidad está fundamentado en tres pilares básicos; por un lado las observaciones astronómicas, el desarrollo de censos y las necesidades de las compañías de seguros en el siglo XV.

Es en el Renacimiento cuando se desarrollan las nociones de probabilidad en función a unos problemas concretos. El problema más importante relativo a los juegos de azar era el conocido como “problema del reparto de apuestas” que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Este problema fue abordado por **Luca Pacioli**, **Gerolamo Cardano** y **Montana**, que dieron soluciones en base a lo ocurrido con respecto a los puntos obtenidos por los participantes hasta el momento en que el juego se interrumpía, incurriendo de esta manera en un error posteriormente corregido por **Niccolo Tartaglia**, aunque Tartaglia fue consciente de que su solución no era la correcta y en su libro donde la publicó dejaba claro que era buena para impartir justicia y equilibrio a un reparto, pero no era exacta desde el punto de vista matemático. El problema del “reparto de apuestas” es uno de los temas tratados en el futuro por Pascal y Fermat en su correspondencia. (Libro: *Historia de la probabilidad*)

**Gerolamo Cardano** fue uno de los personajes más destacables de esta época, escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar: “*Liber de Ludo Aleae*”, la cual escribió en la década de 1560 pero se publicó póstumamente en 1663, entre los temas tratados expone de manera detallada el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de dados, habla acerca del concepto de probabilidad, aproximándolo en términos de proporciones y la noción de juego justo.

Entre los precursores de la probabilidad destacó también un hombre mucho más conocido en otros campos de las matemáticas y la física como fue **Galileo Galilei** (XVI-XVII), que durante su vida también resolvió problemas sobre dados, hasta tal punto que escribió un libro llamado “*Sobre la puntuación en tiradas de dados*”. Sin embargo, la mayor aportación de Galileo a los inicios de la probabilidad fue la invención de su teoría de la medida de errores. Clasificó los errores en dos tipos: “sistemáticos” y “aleatorios”, clasificación que se mantiene aún en la actualidad y estableció cuidadosamente las propiedades de los errores aleatorios. Con esto contribuyó sin saberlo a la creación de ramas fundamentales de la estadística y la probabilidad posterior.

En 1654, **Blaise Pascal**, incitado por Antoine Gombaud, conocido como el *caballero de Meré* (quien le plantea el problema matemático de dividir una apuesta después de la interrupción anticipada de un juego de azar ("problema de los puntos")), mantiene correspondencia con Pierre de Fermat y envía una primera aproximación al cálculo de probabilidades. El problema consistía en que dos jugadores quieren finalizar un juego anticipadamente y, dadas las circunstancias en las que se encuentra el juego, pretenden dividir el premio para el ganador de forma equitativa, teniendo en cuenta las probabilidades que tiene cada uno de ganar el juego a partir de ese punto. A partir de esta correspondencia se supone el origen de la teoría de la probabilidad. Años más tarde, Pascal formuló la hoy llamada “*Apuesta de Pascal*”, una reflexión filosófica sobre la creencia en Dios, basada en consideraciones probabilísticas. El trabajo realizado por Fermat y Pascal en el cálculo de probabilidades permitió crear el marco de trabajo a partir del cual Leibniz desarrollaría el cálculo infinitesimal.

Sería el holandés **Christiaan Huygens**, quien resolviera el problema dándole un tratamiento más científico, publicando el libro “*De ratiociniis in ludo aleae*” (Sobre los Cálculos en los Juegos de Azar), en el año 1656. En él introdujo algunos conceptos importantes en este campo, como la *esperanza matemática*, y resolvía algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Meré.



**Jacques Bernoulli** publicaría en 1713 su tratado “*Ars Conjectandi*” (El arte de la conjetura), en el que aparece la definición probabilística como límite último de las frecuencias relativas. Noción refinada y reformulada por **Abraham De Moivre** posteriormente en su obra “*Doctrine of chances*”: “Una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra el suceso”.

Así mismo **Thomas Bayes** (1702-1761) introduciría el concepto de probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Más específicamente, con su teorema se resuelve el problema conocido como “de la probabilidad inversa”. Esto es, valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Se trata de probabilidad “inversa” en el sentido de que la “directa” sería la probabilidad de observar algo supuesto que rigen ciertas condiciones. El concepto de probabilidad condicionada fue un gran salto adelante en todo el estudio de la probabilidad. (Artículo: *La Probabilidad a lo largo de la historia*)

Fue **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) quién mejoró y desarrolló la mayor parte del teorema de Bayes en su obra “*Theorie analytique des probabilités*” en 1812, además, incluye una exposición sistemática muy completa de la teoría matemática de los juegos de azar con aplicaciones a una gran variedad de cuestiones científicas y prácticas.

A partir, fundamentalmente, de Laplace las dos disciplinas más importantes dentro de la teoría de la probabilidad, que eran el cálculo de probabilidades y la estadística se fusionaron de manera que el cálculo de probabilidades se convirtió en el andamiaje matemático de la estadística. Toda la base matemática que permitió desarrollar la teoría de probabilidades está extraída del análisis combinatorio, una disciplina iniciada por Leibniz y Jacob Bernoulli.

Esta fue sólo la primera de las modernizaciones que sufriría la probabilidad en el siglo XIX. Otra de las más importantes fue la que llevó a cabo el matemático alemán **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855), que desarrolló la teoría de errores conjuntamente con Bessel y Laplace, llegando a establecer el método de mínimos cuadrados como el procedimiento más elemental para resolver los problemas de la teoría de errores.

Otras contribuciones importantes a la teoría de errores fueron las de **Simeon Denis Poisson** (1781-1842) que descubrió que la media aritmética no es siempre mejor que una única observación, **A. Cauchy** (1789-1857) y más tarde de matemáticos rusos como **P. Chebyshev** (1821-1894).

El francés Poisson aportó otras cosas destacadas a la teoría de la probabilidad, en su obra “*Recherches sur la probabilité des jugements*” demostró que en ocasiones la media aritmética no proporciona más información que una única observación de la variable e introdujo la distribución homónima, la cual modeliza ocurrencias de un suceso en un espacio de tiempo con probabilidad baja pero cuyos intentos se ensayan repetidas veces. (Artículo: *La probabilidad a lo largo de la historia*)

A Chebyshev (siglo XIX) se le atribuyen, entre otras aportaciones al cálculo de probabilidades, la introducción del concepto de *variable aleatoria* y fue **A. Liapunov** (1857-1918) quién especificó que

estas variables no serían siempre independientes y que esa dependencia estaba sujeta a ciertas condiciones.

Podemos decir que serían dos los problemas centrales del cálculo de probabilidades durante toda la historia de esta disciplina:

- **El Teorema Central del Límite**, que indica que, bajo condiciones muy generales, la distribución de la suma de variables aleatorias tiende a una distribución normal cuando la cantidad de variables se incrementa.

- **Ley de los Grandes Números**, que dice que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, que es precisamente su probabilidad, cuando el experimento se realiza muchas veces, lo cual por así decirlo, es una visión inversa de la definición frecuentista de probabilidad.

Es de destacar que **Poisson** y **Markov** realizaron interesantes aportaciones al *Teorema Central del Límite* a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. A partir de esta época, las aportaciones al estudio de la probabilidad se encauzarán en tres escuelas fundamentales culminando todo ello en el año 1933 cuando **Kolmogorov**, matemático ruso, publica el libro "*Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad*", en el que establece las bases modernas de la teoría axiomática de la probabilidad y gracias al cual adquiriera reputación como uno de los mayores expertos del mundo en este campo.

### Escuelas del siglo XX:

- **Escuela Rusa:** Los matemáticos rusos dominaron todas las áreas relativas al cálculo de probabilidades y a la estadística durante la segunda mitad del siglo XIX y ya en el siglo XX formaron una escuela dirigida principalmente por **Andrei N. Kolmogorov** (1903-1987) y Khinchine. Los precursores de esta escuela de conocimiento fueron Chebyshev, Markov y Liapunov entre otros, pero fue Kolmogorov el máximo exponente de este movimiento. Todos trabajaron para mejorar la Ley Fuerte de los Grandes números y desarrollaron estudios sobre: estadísticos insesgados y evaluaciones. Estudios basados en la discusiones de trabajos efectuados entre los siglos XV- XVI y apoyándose en las investigaciones de Bayes.

- **Escuela Estadounidense:** Los principales exponentes de la escuela estadounidense especializada en la rama de la probabilidad son **Feller** y **Doob**, aunque el iniciador de este movimiento fue **Nortber Wiener** (1894-1964) quien desarrolló una medida de las probabilidades para conjuntos de trayectorias que no son diferenciables en ningún punto, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias.

Por otra parte William Feller se hizo conocido por sus numerosos estudios acerca del *Teorema Central del Límite* y por su impecable demostración de que la condición de Lindeberg era necesaria además de suficiente.

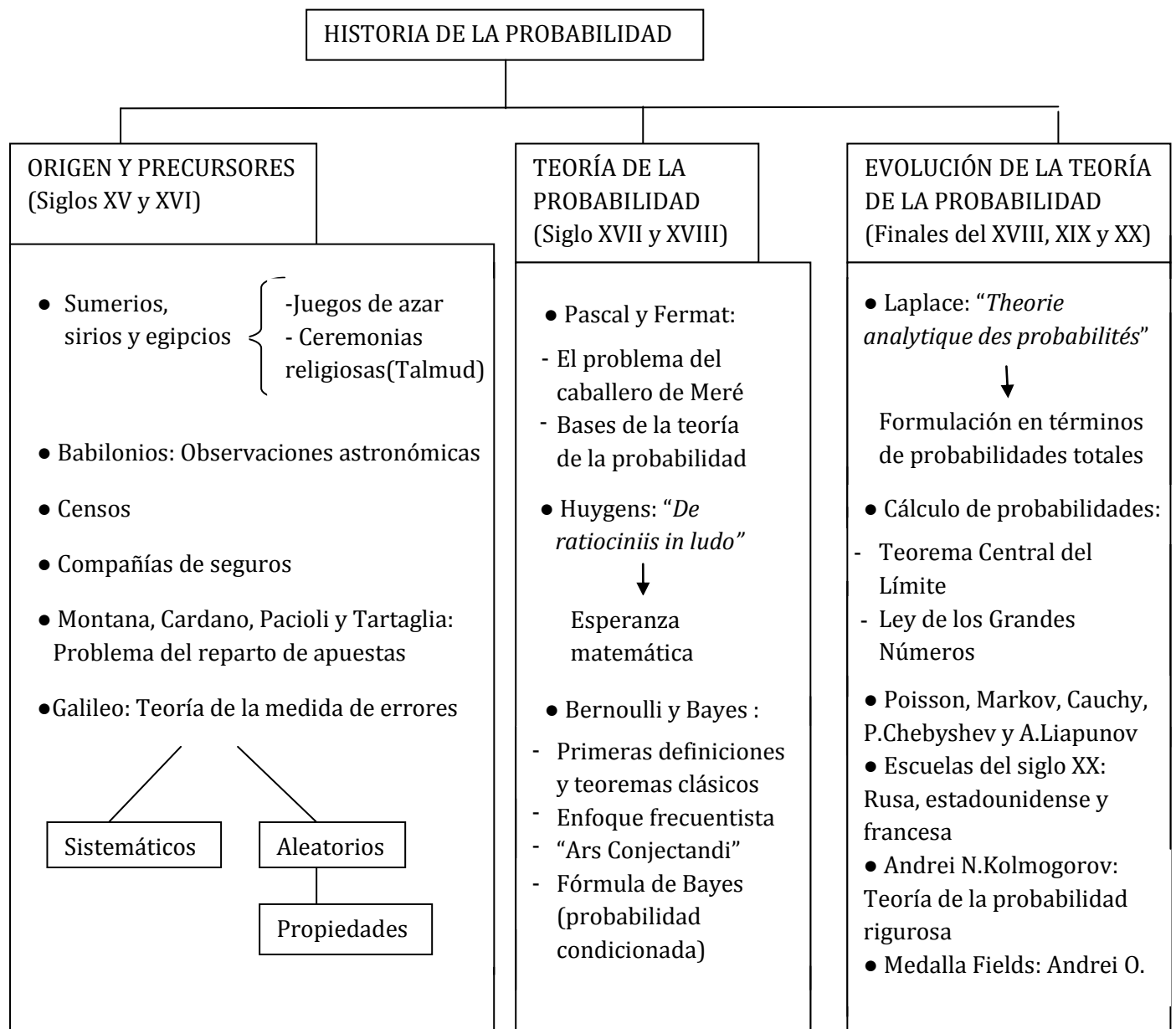
- **Escuela Francesa:** Formada por **Meyer** y su grupo de Estrasburgo, con **Nevev** y **Fortret** en París. Aunque sin duda resalta por encima de todos la figura de **Paul Levy**. Los estudios más importantes referidos a este movimiento se llevaron a cabo en la universidad de París. La innovación y métodos de la escuela francesa influyeron de manera decisiva en las dos escuelas anteriores.

En la **época moderna** el estudio de la probabilidad se extendió por todo el mundo. Se siguieron haciendo aportaciones al Teorema Central del Límite o a la Ley del Algoritmo Dominado. Las publicaciones al respecto dejaron de hacerse en alemán y comenzaron a ver la luz en inglés, quizás debido a los problemas políticos del momento, en un tiempo en el que los fundamentos de la probabilidad reciben un especial trato de favor en pos de una interpretación lógica adecuada. Tras la guerra y la sangría física e intelectual que esto conllevó, el oficio en el marco de la estadística y la probabilidad se convirtió en algo muy popular acentuando la importancia de esta ciencia.

En los años 50 el cálculo de probabilidades como ciencia se extendería a más y más países. Tras ello la verdadera revolución vendría de manos de los ordenadores ya que las viejas actividades tomarían menos tiempo y nuevas actividades serían posibles para ello.

Cabe señalar que una de las últimas medallas Fields concedidas ha recaído en **Andrei Okounkov** por sus contribuciones en la interacción entre la teoría de probabilidades, teoría de la representación y geometría algebraica.

A continuación voy a presentar un esquema final resumiendo las etapas más destacadas en la historia de la probabilidad:



## 1.2 Estructura conceptual

El análisis de contenido clasifica el conocimiento matemático en dos grandes campos: el conceptual (hechos, conceptos, estructuras) y el procedimental (destrezas, razonamientos y estrategias). Los cuales dan lugar a la siguiente estructura conceptual:

### CONOCIMIENTO CONCEPTUAL:

#### Hechos:

*Términos:* Espacio muestral, Sucesos (elementales, imposible, seguro, equiprobables, contrario, compuestos, incompatibles), Probabilidad de un suceso, Frecuencia relativa, Probabilidad condicionada, Experimento aleatorio, Extracciones con o sin devolución, Unión e Intersección de sucesos, Diagrama de árbol.

#### *Notaciones:*

- Espacio muestral:  $E$  o  $\Omega$
- Sucesos:  $A, B$
- Suceso opuesto y contrario:  $\bar{A}, A'$
- Probabilidad:  $P$
- Unión e intersección:  $\cup$  e  $\cap$
- Notación conjuntista:  $\{, \}, [, ]$
- Probabilidad condicionada:  $P(A|B)$

#### *Convenios:*

- $P(A) \in [0,1]$
- $P(\text{seguro}) = 1$
- $P(\text{imposible}) = 0$
- $0! = 1$

#### *Resultados:*

- Regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables a } A}{\text{Total casos posibles}}$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$ .

#### Conceptos:

- Probabilidad de sucesos

- Probabilidad condicionada y compuesta
- Experimento aleatorio y espacio muestral
- Noción de experimento compuesto
- Unión e intersección de sucesos/conjuntos.
- Distintos tipos de sucesos (opuesto, contrario, seguro, equiprobable, compatible e incompatible)
- Frecuencia relativa
- Extracciones con o sin devolución
- Dependencia e independencia de sucesos
- Nociones básicas de teoría de conjuntos
- Técnicas de recuento: variaciones, combinaciones, y permutaciones sin repetición. Números combinatorios.

### **Estructuras:**

- $(\mathbb{Q} \cap [0,1], +, \times)$  cálculo de probabilidades.
- $(\mathbb{N}, +)$  recuento.

## **CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL:**

### **Destrezas :**

- Escritura de sucesos como conjuntos
- Saber identificar las diferentes técnicas de recuento en un problema probabilístico
- Determinar el espacio muestral de un experimento
- Identificar los casos favorables a un suceso
- Usar y reconocer el lenguaje probabilístico en la vida real
- Interpretar tablas de contingencia
- Escritura de cadenas de sucesos mediante el diagrama del árbol.

### **Razonamientos:**

*Deductivo:* Regla del producto, Regla de Laplace y Regla de probabilidad condicionada.

*Inductivo:* Relación entre intuición y probabilidad.

*Figurativo:* Estructuras que se presentan en forma de diagramas de distintos tipos (de Venn, de árbol o de contingencia)

### **Estrategias:**

- Construcción de los diagramas de árbol y de contingencia
- Reconocimiento de las técnicas de recuento
- Cálculo de probabilidades

- Técnicas de resolución de problemas dónde están involucrados los conceptos de probabilidad condicionada y compuesta

## 1.3 Sistemas de representación

Los distintos sistemas que voy a utilizar en el tema para representar los conceptos de probabilidad son los siguientes:

- Lenguaje simbólico:

$\Omega$ , espacio muestral;  $A'$  contrario del suceso  $A$ ;  $P(A)$ , probabilidad del suceso  $A$ ;  $\emptyset$ ,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\{$ ,  $\}$ , notación de conjuntos;  $\frac{n}{m}$  notación fraccionaria.

- Expresiones numéricas:

Decimales comprendidos entre 0 y 1; números fraccionarios entre 0 y 1; números naturales (para el conteo).

- Lenguaje verbal:

Expresiones como “seguro, casi seguro, probable, improbable, casi imposible, imposible”

- Representaciones gráficas y geométricas:

Diagrama de Venn, para las operaciones básicas con conjuntos.

Diagrama de árbol, para la probabilidad compuesta y la regla del producto.

Tablas de contingencia, para la probabilidad condicionada.

Áreas y recintos, para el cálculo de probabilidades en general.

- Materiales y recursos:

Bolas, dados, cartas, monedas... para que los alumnos lleven a cabo ellos mismos algunos experimentos aleatorios.

Ordenador, para interactuar con algunos programas que ayudarán a afianzar conceptos.

## 1.4. Fenomenología del tema y modelización

La probabilidad es una modelización de situaciones aleatorias e imprevisibles.

ANÁLISIS DE CONTEXTOS:

Los contextos en los que he agrupado los distintos fenómenos que la probabilidad modeliza son los siguientes:

### (1) Medida de la incertidumbre:

La probabilidad nos puede dar respuesta a la pregunta *¿cómo podemos cuantificar lo incierto?* Para ello, ante una situación imprevisible de la vida real, primero deseamos los datos irrelevantes para nuestro estudio, y después mediante las herramientas que nos proporciona la probabilidad obtenemos un valor numérico entre 0 y 1 asociado a cada suceso posible del fenómeno. Ese valor numérico nos da una medida de la incertidumbre.

### (2) Estudios de prevención:

Esa medida de la incertidumbre que nos proporciona la probabilidad nos da una pista de lo que puede ocurrir en el futuro, alertándonos de los riesgos que existen ante cada situación.

### (3) Toma de decisiones:

Podemos basarnos en la información que nos proporciona la probabilidad para tomar nuestras decisiones sobre el futuro de forma más acertada. La probabilidad nos ayuda a dar respuesta a la pregunta *¿qué me conviene hacer? O ¿en qué medida he escogido correctamente?*

## ANÁLISIS DE FENÓMENOS:

Algunos de los fenómenos donde adquieren significado los conceptos de este tema pueden ser:

- Problemas donde intervienen fenómenos aleatorios
- Problemas de incertidumbre
- Juegos de azar

## 1.5. Contenidos específicos de la unidad didáctica (U.D.)

### CONTENIDOS ESPECÍFICOS DENTRO DEL MARCO DE BACHILLERATO

El estudio PISA y el BOE en relación a esta unidad didáctica recogen lo siguiente:

◆ **PISA:** Para el estudio Pisa la alfabetización o competencia matemática es la *“capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”*. Luego para evaluar si los estudiantes están debidamente alfabetizados se preparan una serie de ítems, los cuales están contruidos teniendo en cuenta tres variables: El contenido matemático, las competencias y las situaciones y contextos.

En el caso de los contenidos, el tratado de Pisa indica que el currículo escolar de matemáticas se suele organizar mediante contenidos temáticos, que reflejan ramas bien establecidas del conocimiento matemático que facilitan el desarrollo estructurado de un programa. Pisa organiza los contenidos

atendiendo a grandes áreas temáticas: Cantidad, Espacio y Forma, Cambio y relaciones e Incertidumbre, entendida esta por dos tópicos relacionados: tratamiento de datos y azar. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad respectivamente. Aquí es donde se ubica esta Unidad Didáctica, en el *azar*.

Los conceptos y actividades que son importantes en esta área según Pisa son la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones, *la probabilidad y la inferencia*.

♦ **BOE:** En el BOE los contenidos de matemáticas se distribuyen en 5 bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y Estadística y probabilidad.

En el bloque de Estadística y Probabilidad se destaca que debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio hace capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística.

Esta unidad didáctica sobre Introducción Formal a la Probabilidad está dirigida para el nivel de 2º Bachillerato de la rama de Ciencias Sociales.

#### CONTENIDOS DE 2ºBACHILLERATO:

Con respecto al cálculo de probabilidades:

- Manejo de los distintos conceptos relacionados con la probabilidad para describir y cuantificar de forma adecuada las diversas situaciones relacionadas con el azar.
- Experimentos aleatorios y determinados.  
Experimentos simples y compuestos.  
Espacio muestral. Espacio de sucesos.  
Frecuencia relativa.  
Punto muestral o suceso elemental.  
Sucesos aleatorios, equiprobables y no equiprobables, dependientes e independientes.
- Tipos de sucesos y reconocimiento de cada uno de ellos en los distintos contextos.
- Expresar experimentos compuestos como unión de otros más simples.
- Operar con sucesos y describir las operaciones a través de diagramas de Venn.
- Propiedades de la probabilidad.

Con respecto a la Ley de los Grandes Números:

- Ley de los Grandes Números y su utilidad en la práctica.
- Limitaciones y posibilidades de la Ley de los grandes números.
- Ley de Laplace y utilidad para definir probabilidades.
- Limitaciones y posibilidades de la Ley de Laplace.

Con respecto a los axiomas de Kolmogorov:

- Concepto de probabilidad definido por los axiomas de Kolmogorov.
- Reconocimiento si ciertas funciones son o no una probabilidad sobre un espacio de sucesos.



Con respecto a Combinatoria:

- Distintos números combinatorios: Variaciones (con y sin repetición), Permutaciones y Combinaciones.
- Utilización de sus propiedades para el cálculo de algunos de ellos.

Con respecto a la probabilidad condicionada

- Probabilidad condicionada.
- Resolución de situaciones problemáticas en las que intervienen probabilidades.
- Experimentos con diagramas en árbol o con tablas de contingencia.
- Teoremas principales de la probabilidad condicionada: Teorema de la probabilidad compuesta, Teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes.
- Cálculo de probabilidades *a posteriori*.

Una vez estudiados los contenidos relacionados con el tema paso a describir la clasificación que he realizado, donde he organizado los contenidos en cuatro bloques:

- ▶ Reconocimiento del espacio muestral.
- ▶ Cálculo de probabilidades.
- ▶ Experimentos compuestos.
- ▶ Probabilidad en la vida real.

#### **Reconocimiento del espacio muestral:**

- Experimento aleatorio.
- Espacio muestral.
- Sucesos: elementales, seguros, imposibles, contrarios, compatibles e incompatibles.
- Nociones básicas de teoría de conjuntos: conjunto vacío, total.
- Notación correspondiente a teoría de conjuntos.
- Unión de sucesos.
- Intersección de sucesos.
- Diagrama de Venn.
- Notación propia de unión e intersección.
- Suceso contrario.

#### **Cálculo de probabilidades:**

- Frecuencia relativa.
- Sucesos equiprobables.
- Regla de Laplace.
- Propiedades de la probabilidad.
- Probabilidad de sucesos seguro e imposible.
- Diagrama de árbol.
- Probabilidad de sucesos compatibles e incompatibles.

### Experimentos compuestos:

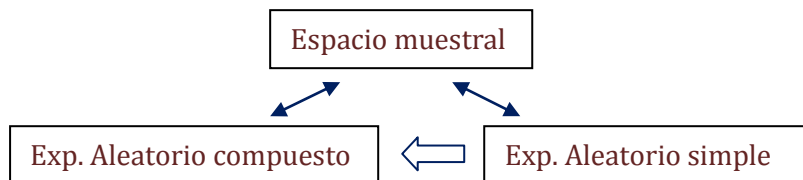
- Dependencia e independencia de sucesos.
- Diagrama de árbol.
- Técnicas de recuento: variaciones, combinaciones y permutaciones.
- Extracción con/sin devolución.
- Probabilidad condicionada y compuesta.
- Regla del producto.
- Diagrama de contingencia.

### Probabilidad en la vida real:

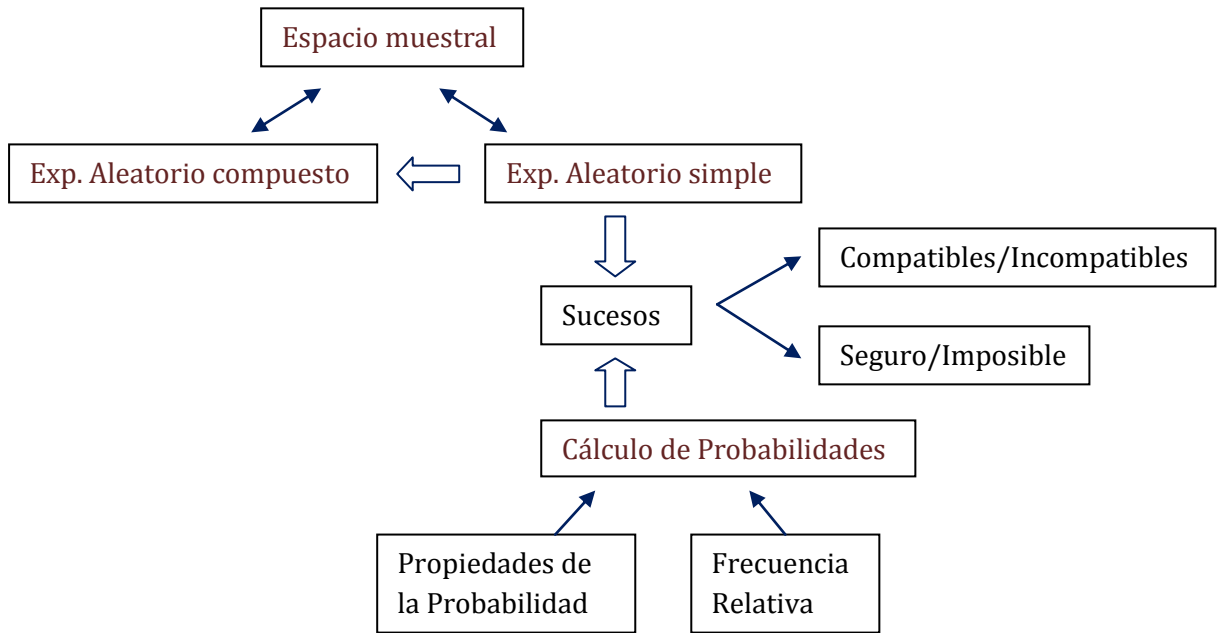
- Fluidez en el lenguaje probabilístico.
- Relación entre intuición y probabilidad
- Identificación de la probabilidad en la vida cotidiana.
- Juegos de azar.
- Utilización de material informático.

A continuación voy a ir construyendo un mapa conceptual que relaciona los contenidos y los sistemas de representación.

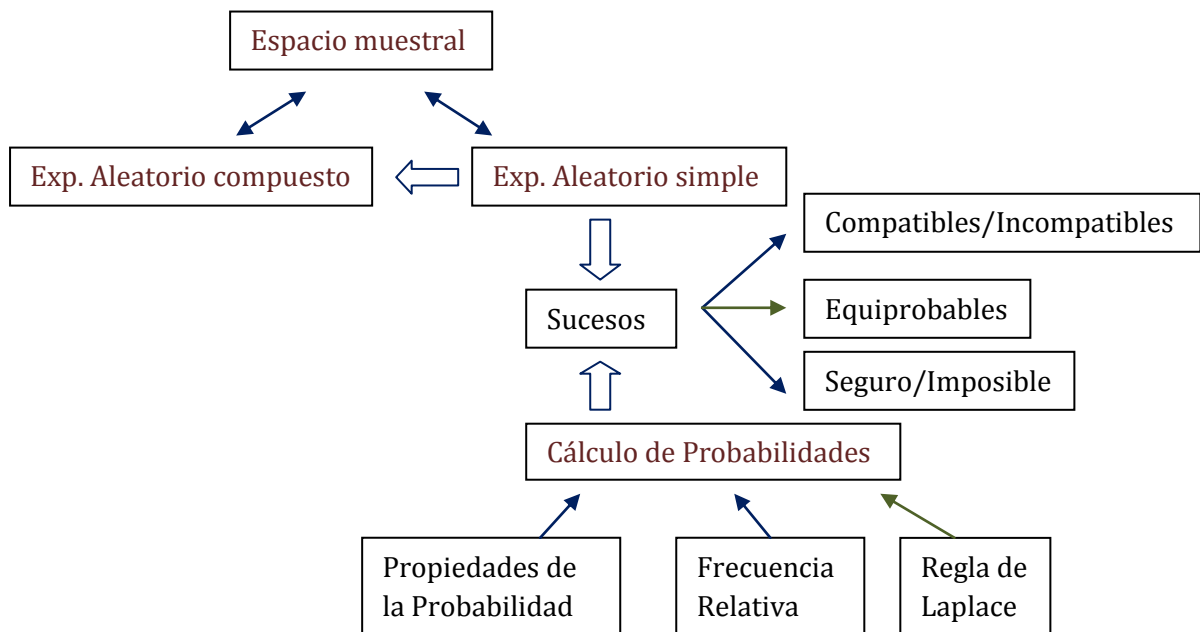
Parto del espacio muestral, el cual puede ser dado a partir de experimentos (compuestos o simples) o a partir de él obtenerlos, por eso la relación es bidireccional, mientras que la existente entre los experimentos es unidireccional.



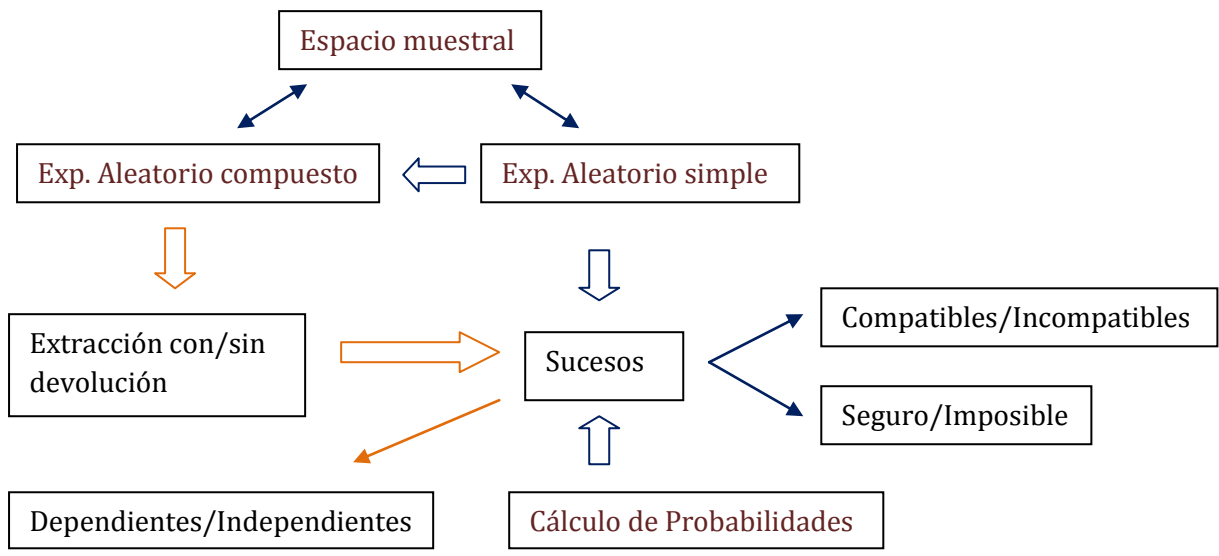
Amplio las relaciones a partir de los experimentos aleatorios simples. Dichos experimentos dan lugar a una serie de sucesos (seguro, imposible, compatible e incompatible). Y es a ellos, a quienes podemos calcular su probabilidad. Una probabilidad que se puede explicar a través de la frecuencia relativa y posee una serie de propiedades.



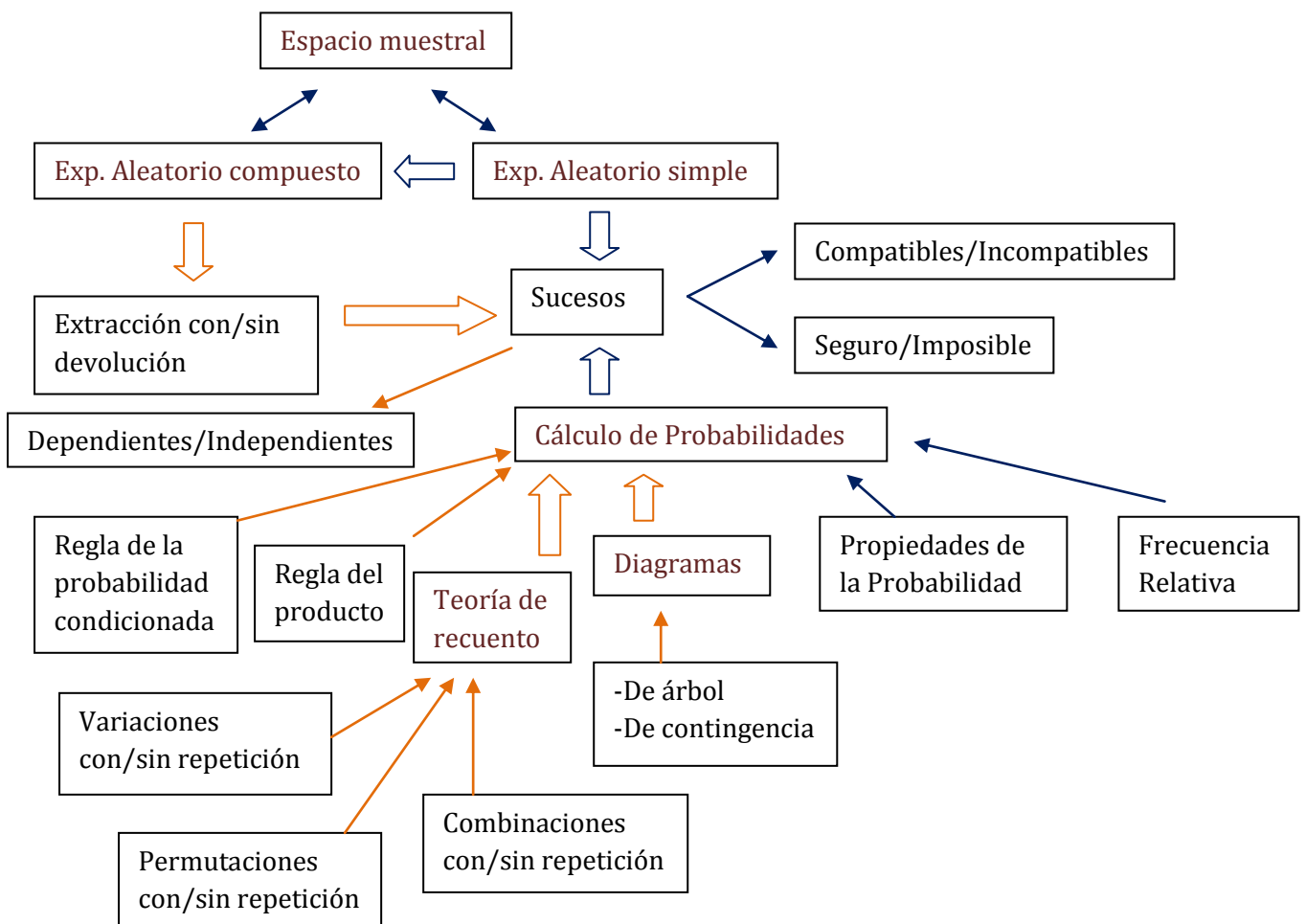
Un caso particular de los sucesos simples son los sucesos equiprobables, para los que se usa la llamada Regla de Laplace (indicador con flechas de color verde)



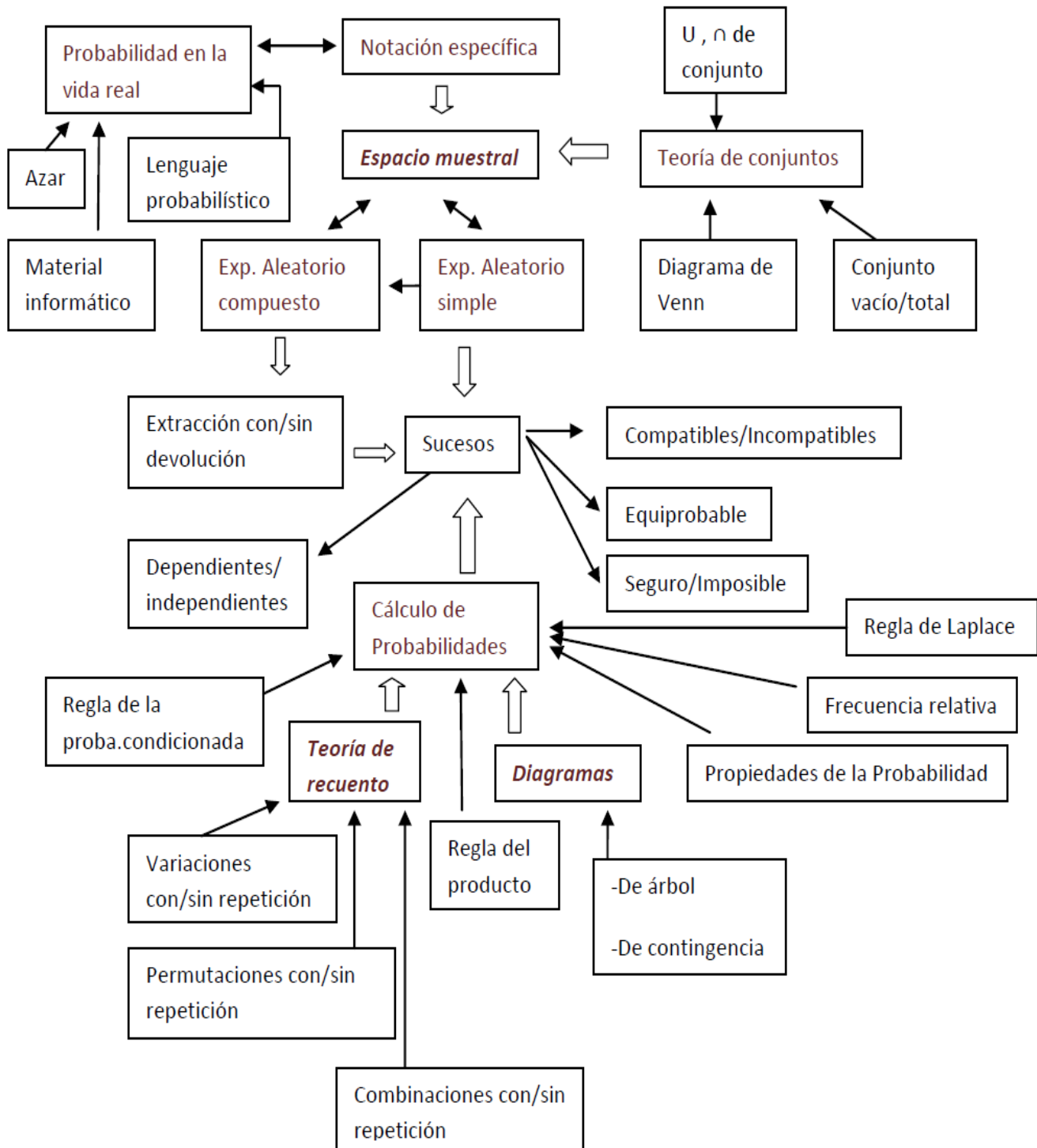
Si nos centramos en los experimentos compuestos debemos diferenciar experimentos con/sin devolución. A los sucesos obtenidos (dependientes o independientes), también se les puede calcular su probabilidad. Una probabilidad que como en el caso anterior mantiene unas propiedades y que se puede definir a partir de la frecuencia relativa.



Pero además de los conceptos compartidos del cálculo de probabilidades para sucesos compuestos y simples, existen una serie de reglas, diagramas y teoría de recuento específicos de los compuestos. Esta relación determinada por los experimentos aleatorios compuestos está establecida en el mapa mediante las flechas de color naranja:



Si añadimos una notación específica (necesaria para todos y cada uno de los conceptos) y una teoría de conjuntos, así como uno de los aspectos más importantes, como es la probabilidad en la vida real, que nos va a permitir no solo motivar a nuestros alumnos, sino hacerles ver que la probabilidad es un concepto matemático que se presenta en nuestra vida de muchas maneras, el mapa conceptual final queda de la siguiente manera:



# ANÁLISIS COGNITIVO

## 2.1. Expectativas que se esperan desarrollar

A la vista del análisis del contenido realizado previamente, he agrupado el aprendizaje en los siguientes tres focos prioritarios:

▶ Dominio del espacio muestral

Al principio los alumnos deben familiarizarse con los conceptos más básicos del tema, los tipos de sucesos, la notación; y saber construir y reconocer adecuadamente el espacio muestral de un experimento; de este modo se sientan las bases para poder trabajar con el concepto de probabilidad posteriormente.

▶ Probabilidad con experimentos simples

En este foco se espera del alumno que alcance un buen dominio de los distintos recursos y reglas para calcular (e intuir) la probabilidad de diferentes sucesos en distintos contextos y situaciones.

▶ Probabilidad compuesta

Este foco se encuentra en un nivel mayor de dificultad. Se requiere al alumno desenvolvura al resolver problemas con experimentos aleatorios compuestos, así como habilidad al construir e interpretar las distintas formas de representación en las que suele aparecer la información.

A continuación, enuncio los principales objetivos específicos que se abordan en este tema, agrupados en los tres focos, así como las competencias PISA que cada objetivo contribuye a desarrollar, donde:

PR= Pensar y Razonar, AJ= Argumentar y Justificar, C= Comunicar, M= Modelizar,

RP= Resolver Problemas, R= Representar, LS= Lenguaje Simbólico, HT=Herramientas tecnológicas.

<b>Foco 1: Dominio del espacio muestral</b>		<b>Competencias PISA</b>
1	Distinguir entre experimentos deterministas y experimentos aleatorios.	PR, AJ, C
2	<b>Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.</b>	AJ, C,M
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.	R, LS
4	Identificar los sucesos seguro e imposible de un experimento aleatorio.	PR, R, LS
5	Construir el suceso contrario a uno dado.	PR, R, LS
6	Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles.	PR, R, LS

<b>Foco 2: Probabilidad con experimentos simples</b>		<b>Competencias Pisa</b>
7	Comprender la noción de probabilidad como límite de las frecuencias relativas.	M, R, HT
8	Reconocer y plantear situaciones de equiprobabilidad	PR, AJ, RP
9	Identificar los casos favorables y casos posibles en un experimento.	PR, M, R
10	Dominar las propiedades básicas de la probabilidad.	PR, RP,LS
11	<b>Comprender y usar la regla de Laplace.</b>	PR, AJ, RP
12	Expresar e interpretar la probabilidad geoméricamente como un área.	C, R, HT
13	Elaborar enunciados de problemas acorde con unos datos probabilísticos.	PR, RP, LS
14	Clasificar un experimento simple en los contextos a los que corresponda.	AJ, C, M

<b>Foco 3: Probabilidad compuesta.</b>		<b>Competencias PISA</b>
15	<b>Distinción de sucesos dependientes e independientes.</b>	PR, C, LS
16	Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den.	RP, R, LS, HT
17	Comprender y usar la regla del producto.	PR, AJ, RP
18	<b>Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.</b>	PR, AJ, RP
19	Expresar e interpretar datos de tablas de contingencia.	C, RP, R
20	<b>Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana.</b>	AJ, C, HT, M
21	Saber identificar técnicas de recuento: Variaciones, combinaciones y permutaciones sin repetición.	PR, AJ, LS, RP
22	Clasificar un experimento compuesto en los contextos a los que corresponda.	AJ, C, M

De esta lista de objetivos, he destacado algunos en negrita, con ello quiero señalar, desde mi punto de vista, los que tienen más relevancia en el tema.

La siguiente tabla muestra el balance total de contribución al desarrollo de las competencias PISA:

<b>BALANCE TOTAL</b>	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Dominio del espacio muestral	4	2	2	1	0	4	4	0
Probabilidad con experimentos simples	5	3	2	3	4	3	2	2
Probabilidad compuesta	4	5	4	2	5	2	3	2
<b>TOTAL</b>	13	10	8	6	9	9	9	4

Se puede observar en esta última tabla que a las competencias a las que más se contribuye son PR, AJ, R, RP y LS, mientras que al resto se contribuye en menor medida.



## 2.2 Ejemplificación de tareas desde los objetivos y las competencias

De los tres focos, escojo los objetivos: 2, 11 y 15:

**Objetivo 2:** *Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.*

Ejemplo de tarea: Describe experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales se correspondan con los apartados siguientes:

- a)  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- b)  $\Omega = \{1,Y,2\}$
- c)  $\Omega = \{(CCX),(XXX),(CXC),(XXC), (CCC),(XCC),(CXX),(XCX)\}$

**Objetivo 11:** *Comprender y usar la regla de Laplace.*

Ejemplo de tarea:

Dos amigos están jugando a las cartas. Luis dice: “la próxima carta que se extraiga será un rey” y Maria dice: “será figura”. ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de acertar?

**Objetivo 15:** *Distinción de sucesos dependientes e independientes.*

Ejemplo de tarea:

En el experimento aleatorio “lanzar un dado de 6 caras”, se consideran los sucesos  $A = \{\text{sacar } 4\}$  y  $B = \{\text{sacar impar}\}$ .

- a) Explica con tus palabras si crees que se trata de sucesos dependientes o independientes.
- b) Comprueba tu respuesta calculando las probabilidades  $P(A \setminus B)$  y  $P(B \setminus A)$  y comparándolas con  $P(A)$  y  $P(B)$ .

## 2.3 Errores y dificultades posibles en el desarrollo de la U.D

En cuanto al análisis de los obstáculos que pueden encontrarse en el desarrollo de la materia, podemos distinguirlos en errores y dificultades. La distinción entre ellos la he hecho de la siguiente forma:

- Me refiero a error cuando el alumno actúa según una regla que no es válida desde un punto de vista matemático.

- La dificultad indica el mayor o menor grado de complejidad de una determinada tarea para los alumnos ante un tema de estudio.

Es de suma importancia tener en cuenta los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se pueden dar por múltiples razones: bien debido a que el alumno tenga problemas para asimilar algún concepto o arrastre el concepto mal aprendido de cursos anteriores, también es probable que el profesor, en su tarea docente, lo haya explicado de forma no significativa o poco clara para el alumno. El error sería un indicativo para el profesor de que debe intentar explicar ese concepto o resultado de distinta forma, usando otro método o ejemplos, o, simplemente, los errores pueden señalar que esa materia o contenidos específicos entrañan más dificultades a los alumnos, con lo que el profesor debe dedicar más tiempo a esa parte para mostrarla con mayor detalle.

A continuación voy a enumerar las dificultades y errores más significativos de esta unidad:

- D1.** Dificultad al traducir del lenguaje verbal a la simbología conjuntista.
- D2.** No asimilar que la función probabilidad adquiere valores entre 0 y 1, debido a una posible confusión con el concepto de porcentaje (de 0 a 100).
- D3.** Dificultad en la comprensión a nivel léxico-semántico del enunciado de un problema probabilístico.
- D4.** Dificultad al distinguir si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- D5.** Aplicar sin criterio que la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.
- D6.** Considerar que todas los sucesos son equiprobables.
- D7.** Confundir probabilidad condicionada con la probabilidad de la intersección.
- D8.** Dificultad al analizar, simplificar y ordenar los datos de un problema para estructurarlos en forma de tablas y otras representaciones.
- D9.** Dificultad a nivel intuitivo y deductivo en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado.
- D10.** No tener criterios para diferenciar las combinaciones de las permutaciones o de las variaciones.
- D11.** Concepto de probabilidad como límite de frecuencias relativas.
- D12.** Determinar los casos favorables de un suceso.
- D13.** Confundir el suceso condicionante del condicionado.
- D14.** Mezclar magnitudes probabilísticas y porcentuales.
- D15.** Describir situaciones en la vida real que se ajusten a unos datos probabilísticos dados.

### ***¿Cómo podemos evitar los errores?***

En primer lugar debe aclararse que, al igual que en dos aulas diferentes surgen distintas dificultades, no existe una fórmula efectiva al 100% de los casos para hacer que los alumnos reconozcan sus errores y los subsanen. Sin embargo, se pueden proponer distintos planteamientos que ayuden al alumnado a comprender mejor los conceptos, afianzarlos en caso de dudas y cambiar concepciones erróneas sobre la probabilidad.

Por ejemplo, en la dificultad “describir situaciones en la vida real que se ajusten a unos datos probabilísticos dados”, podemos ir reformando la situación errónea dada por el alumno hasta obtener una que cumpla todos los datos. Así el alumno vería el error como algo usual incluido en el proceso de aprendizaje y no como algo que se debe castigar.

Otro ejemplo puede ser el siguiente: en el error “dificultad a nivel intuitivo y deductivo en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado”, podemos proponer tareas como: “Dado el experimento aleatorio “lanzar dos monedas”, hallar: el espacio muestral, dos sucesos seguros y dos sucesos imposibles, el suceso contrario a “salir un número menor que dos”.

En la dificultad, “considerar que todas las situaciones son de equiprobabilidad” podemos proponer una tarea relacionada con la meteorología, ya que el alumno está familiarizado con este concepto. Así verá que los sucesos “hacer sol” y “llover” no tienen la misma probabilidad en Asturias, por lo que la situación no es de equiprobabilidad y no podemos aplicar la regla de Laplace.

# ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

## 3.1 GRADOS DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS

Voy a presentar para cada grado de complejidad una tarea: las tareas propuestas en el grado de **reproducción** tienen como finalidad asentar los conocimientos impartidos en clase, las de **conexión**, que los alumnos practiquen la materia y contenidos explicados en contextos diferentes a los practicados, relacionando diferentes formas de representación, y las tareas de **reflexión** tienen como finalidad ampliar conceptos, relacionar diversos procedimientos y estrategias, así como dominar el proceso de construcción de modelos.

### Reproducción:

Se realiza una encuesta a un total de 233 personas, de las cuales 159 son fumadores y de ellas 36 no padecen bronquitis; mientras que de las no fumadoras, 12 sí que la padecen.

1. Construye la tabla de contingencia correspondiente.
2. Escribe el espacio muestral de este experimento
3. Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:
  - a) Estar enfermo.
  - b) No estar enfermo.
  - c) Estar enfermo entre los fumadores.
  - d) Estar enfermo entre los no fumadores.
  - e) No estar enfermo entre los fumadores.
  - f) No estar enfermo entre los no fumadores.
  - g) A la vista de estos resultados, si pretendes no estar enfermo, ¿Qué crees que es más aconsejable: fumar o no fumar? Razona tu respuesta.

Este es un claro ejemplo de tarea de Reproducción, pues es análoga a otras tareas realizadas con anterioridad en el aula. Su único propósito es que el alumno mecanice la forma de proceder ante este tipo de ejercicios.

### Conexión:

En el experimento aleatorio “lanzar un dado de 6 caras”, considera los sucesos:

$A = \{\text{sacar } 6\}$  y  $B = \{\text{sacar par}\}$ .

- Explica con tus palabras si crees que se trata de sucesos dependientes o independientes.
- Comprueba tu respuesta calculando las probabilidades  $P(A|B)$  y  $P(B|A)$  y comparándolas con  $P(A)$  y  $P(B)$ .

### Reflexión:

Para tratar de curar una enfermedad se ha aplicado un nuevo tratamiento a 81 pacientes y se ha mantenido el tratamiento antiguo a 79 pacientes. De los que han recibido el nuevo tratamiento se han curado 60, y de los que han recibido el tratamiento antiguo no se han curado 36. Elabora la tabla de contingencia.

Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:

- Que se haya curado.
- Que no se haya curado.
- Que se haya curado sabiendo que ha recibido el nuevo tratamiento.
- Que no se haya curado sabiendo que ha recibido el nuevo tratamiento.
- Que se haya curado sabiendo que ha recibido el tratamiento antiguo.
- Que no se haya curado sabiendo que ha recibido el tratamiento antiguo.

En esta tarea se usa una nueva forma de representación: la tabla de contingencia. También se exige la comprensión de las respuestas plasmadas en ella. Y cómo no, deben reflexionar sobre esta estrategia en particular.

## 3.2. Recursos y materiales didácticos

Los recursos y materiales didácticos que utilizaría en esta unidad didáctica serían:

- Ordenadores con conexión a internet.
- Cañón y pantalla.
- Dados, monedas, cartas.
- Revistas y periódicos.

Otros recursos:

También se usarán recursos convencionales como pizarra, libro de texto, calculadora gráfica o convencional, apuntes propios y relaciones de ejercicios.

### 3.3 Secuenciación y organización de las tareas de la unidad didáctica. Gestión del aula.

Cada sesión la voy a organizar de la siguiente forma:

- Corrección del ejercicio voluntario propuesto la sesión anterior por parte de uno de los alumnos que lo hayan realizado. Este ejercicio sirve de nexo de unión entre la sesión anterior y la actual.
- Presentación de un ejemplo o realización de un ejercicio por parte del profesor que permita introducir los nuevos contenidos programados para esa sesión, así como motivar a los alumnos haciéndoles ver la utilidad de dichos contenidos.
- Una vez explicada la materia, se realizará alguna tarea para consolidar estos nuevos conocimientos, buscando siempre que las tareas traten de situaciones lo más cercanas posibles al alumno.
- Por último, propondré una tarea o varias obligatorias y una voluntaria para realizar en casa y entregar al día siguiente.

Las tareas se realizarán en 7 sesiones de clase, que en orden de ejecución serían:

1. Introducción al espacio muestral. La probabilidad como límite.
2. Regla de Laplace. Probabilidad de la unión.
3. Probabilidad del suceso contrario. Representaciones gráficas: probabilidad como área y diagrama de Venn.
4. Probabilidad compuesta. Diagramas de árbol. Técnicas de recuento.
5. Probabilidad condicionada. Tablas de contingencia.
6. Repaso. Corrección de la relación de ejercicios.
7. Examen

# DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO FORMAL DE LA PROBABILIDAD

## Sesión 1: Introducción al espacio muestral. La probabilidad como límite.

Análisis del contenido de la sesión:

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Esta sesión al ser la primera va a tener un carácter motivacional y además va a introducir conceptos que se vieron el año anterior.

Luego los contenidos que se van a tratar son básicos:

- Reconocimiento de experimento aleatorio y determinista.
- Ejemplificación del concepto de experimento aleatorio.
- Definición y construcción del espacio muestral.
- Suceso elemental, compuesto, seguro, imposible, contrario a uno dado, compatible e incompatible.
- Argumentos para justificar el concepto intuitivo de probabilidad. La probabilidad como límite de frecuencias relativas.

Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores:

Esta sesión es la primera. Los alumnos han tenido contacto con el cálculo de probabilidades en cursos anteriores, por lo que esta sesión será de revisión de conocimientos previos y servirá de introducción para la siguiente sesión “Regla de Laplace. Probabilidad de la unión”.

Por lo que los objetivos que se pretenden son los correspondientes al primer foco y parte del segundo, que implican las competencias que muestro en la siguiente tabla:

<b>Foco 1. Dominio del espacio muestral</b>		<b>Competencias.</b>
1	Distinguir entre experimentos deterministas y experimentos aleatorios.	PR, AJ, C
2	Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.	AJ, C,M
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.	C, R, LS
4	Identificar los sucesos seguro e imposible de un experimento aleatorio.	PR, C, R, LS
5	Construir el suceso contrario a uno dado.	PR, C, R, LS
6	Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles.	PR, C, R, LS
7	Comprender la noción de probabilidad como límite de las frecuencias relativas	M, R, HT

### Secuencia de tareas:

#### **Tarea 1** (Duración aproximada: 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*El profesor pregunta a los alumnos que para qué creen que sirve la Probabilidad, y que entienden ellos intuitivamente por Probabilidad. A partir de sus respuestas se van perfilando los tres contextos en los que se enmarca la probabilidad: medida de la incertidumbre, prevención de riesgos y toma de decisiones. Además, el profesor tendrá preparados noticias y artículos de periódicos y revistas acordes con las tres situaciones.*

Material o recurso necesario: Periódicos, revistas.

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo.

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Tratar de motivar al grupo-clase.

#### **Tarea 2** (Duración aproximada: 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*Se dan ejemplos de sucesos: Ver por dónde sale el sol, medir el peso de una naranja, extraer una carta de la barja española, contar el número de páginas de un libro...y se pregunta si es posible determinar o*

no el resultado de antemano. Tras clasificar los experimentos, se da la definición de experimento aleatorio y determinista. A continuación, se requiere a los alumnos que propongan ejemplos de ambos tipos y justifiquen su propuesta.

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo

Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Que los alumnos sean quienes se aproximen a la definición de los conceptos a partir de sus propios ejemplos.

### **Tarea 3** (Duración aproximada: 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Se divide la clase en grupos de 3 personas. En los ordenadores se les pide que interactúen con el programa que simula lanzamientos de un dado. Para ello podemos entregarles un guión como el que presentamos, y así dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué observan tras un lanzamiento? ¿Y tras 5? ¿Y al cabo de 1000? ¿Ven que el gráfico se va nivelando? ¿Se podría decir que cada valor tiende a un número concreto? A raíz de este experimento, definimos la probabilidad de un suceso como el valor hacia el cual tienden las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de realizaciones del experimento.

Número de tiradas:	Observaciones en el gráfico:	Interpretación del experimento:
1		
5		
100		
+1000		

Material o recurso necesario: Ordenador

Previsiones sobre la gestión del aula: Trabajo en grupos de tres personas durante unos minutos, después, un representante de cada grupo expone sus conclusiones.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de que los alumnos comprendan intuitivamente el concepto de probabilidad, a la vez, se persigue que los alumnos se acostumbren a trabajar en grupo.

### **Tarea 4** (Tarea obligatoria para realizar en casa)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:



NOTA: Antes de mandar esta tarea para la casa, el profesor realiza en clase un ejemplo de lanzar un dado cúbico, mostrando a los alumnos sobre los posibles resultados, y así llegamos a la definición de espacio muestral, suceso elemental, suceso compuesto, suceso seguro, imposible, contrario a uno dado y sucesos compatibles e incompatibles (duración aproximada 5'). Y propongo para hacer en casa las siguientes tareas:

1. *En el experimento extraer una carta de la baraja describe un suceso seguro, un suceso imposible y el contrario de uno que tú elijas.*
2. *Describe experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales son los siguientes:*
  - a)  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - b)  $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
  - c)  $\Omega = \{R, A, V\}$
3. *Describir el espacio muestral asociado a cada uno de los experimentos siguientes:*
  - *Extraer, sin reemplazamiento, una a una dos bolas de una urna que contiene bolas rojas, verdes y blancas en número suficiente.*
  - *Lanzar una moneda hasta que aparezca cara.*
  - *Un dado es lanzado 5 veces consecutivas.*
  - *Extraer una carta de la baraja española.*

Material o recurso necesario: Dados con distinto número de caras

Previsiones sobre la gestión del aula: En el ejemplo propuesto por el profesor de los dados, el profesor interactúa con el grupo-clase. Las demás actividades se entregarán en la siguiente sesión.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Que el alumno consolide los conocimientos adquiridos en dicha sesión.

**Tarea 5** (Tarea voluntaria para realizar en la casa)

Completa la siguiente tabla:

Experimento:	Espacio muestral:	Suceso elemental	Suceso imposible:	Suceso compuesto :	Suceso contrario al dado:
Lanzamiento de un dado de 6 caras.	{1,2,3,4,5,6}	{2},{1}	{7}	{2,4,6}	{1,2,3}-> {4,5,6}
Lanzamiento de 2 monedas.					{C,C}->
	{Rojo, verde, azul, negro}				Negro->
		Sota de bastos.			copas->

NOTA: Algunos de los applets interesantes para hallar la probabilidad de sucesos puede ser los siguientes:

[http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Giuliano/TP%20FINAL%20MD%20giuliano/PROBABILIDAD/probabilidad/applets/applet%20probabilidad\\_de\\_sucesos.htm](http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Giuliano/TP%20FINAL%20MD%20giuliano/PROBABILIDAD/probabilidad/applets/applet%20probabilidad_de_sucesos.htm)

Como Apple de aplicaciones de los axiomas tenemos el siguiente:

[http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Giuliano/TP%20FINAL%20MD%20giuliano/PROBABILIDAD/probabilidad/applets/applet%20aplicaciones\\_de\\_los\\_axiomas.htm](http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/Giuliano/TP%20FINAL%20MD%20giuliano/PROBABILIDAD/probabilidad/applets/applet%20aplicaciones_de_los_axiomas.htm)

## **Sesión 2: Regla de Laplace. Probabilidad de la unión.**

Análisis del contenido de la sesión:

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Desde la definición frecuentista de probabilidad forzar la necesidad de que esta sea un número entre 0 y 1. Atribuir a los sucesos ciertas características básicas y construir los fundamentos para enmarcarlos dentro de un sistema de representación básico de teoría de conjuntos a nivel intuitivo. Acentuar tras su definición la necesidad e importancia de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.

Los contenidos básicos que se van a tratar en esta sesión son los siguientes:

- Probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.
- Definición de sucesos equiprobables.
- Definición y uso de la regla de Laplace.
- Unión e intersección de conjuntos.

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores: La presente sesión deja ya de ser un mero repaso para dedicarse exclusivamente al desarrollo de conceptos y herramientas básicas del cálculo de probabilidades. Los temas tratados en la sesión anterior serán de vital importancia para el desarrollo de esta. Así todos los ejemplos expuestos se harán de manera que el enlace con la sesión anterior sea imprescindible.

Situaciones y contextos: Científico, personal y social.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Dominio del espacio muestral	
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa (C, R, LS)
4	Identificar los sucesos seguros e imposible de un experimento aleatorio (PR, C, R, LS)
5	Construir el suceso contrario a uno dado (PR, C, R, LS)

Probabilidad con experimentos simples	
8	Reconocer y plantear situaciones de equiprobabilidad (PR, AJ, RP)
9	Identificar los casos favorables y casos posibles en un experimento (PR, M, R)
10	Dominar las propiedades básicas de la probabilidad.
11	Comprender y usar la regla de Laplace (PR, AJ, RP)
14	Clasificar un experimento simple en los contextos a los que corresponda (AJ, C, M)

### Secuencia de tareas:

#### **Tarea 1**

Corrección del ejercicio voluntario (duración aproximada 10')

#### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*El profesor pregunta a los alumnos que han hecho el ejercicio voluntario para que alguno de ellos salga a la pizarra y resuelvan el ejercicio que propuso el día anterior en clase, de esa forma, al resolverlo, el profesor irá preguntando al resto de alumnos si están de acuerdo con sus resultados y si no es así, se irán resolviendo las dudas.*

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo-clase.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se intenta motivar al alumno para que sea él mismo quien se dé cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todos los alumnos un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

#### **Tarea 2**

(Duración aproximada 20')

#### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor comenzará a lanzar una moneda repetidas veces y apuntará los resultados en la pizarra, cuando el número de lanzamientos sea el adecuado (más de 30) para poder inferir que los sucesos

cara o cruz son equiprobables se motivará una discusión en clase con el fin de sacar las siguientes conclusiones:

- La imposibilidad del desarrollo de la teoría de la probabilidad mediante una definición frecuentista.
- La condición de equiprobabilidad de los sucesos cara o cruz.
- La extracción a partir de el concepto de equiprobabilidad una nueva regla que permita calcular la probabilidad de manera menos fatigosa.

A partir de la definición de la regla de Laplace se realizará el siguiente ejercicio:

*Se considera el experimento consistente en lanzar dos dados no trucados y observar el resultado. Hallar las siguientes probabilidades:*

- a) *No obtener resultados iguales*
- b) *Obtener como suma 7*
- c) *Obtener al menos un 6*

El profesor acentuará el carácter de equiprobabilidad a la hora de lanzar los dados si estos no están trucados y la imposibilidad de repetir el experimento eternamente.

Material y recursos necesarios: Una moneda, pizarra y tiza.

Previsiones sobre la gestión del aula: El fin de todo el ejercicio es crear un debate en clase, afianzar la necesidad del uso de la regla de Laplace y distinguir de manera correcta la característica de equiprobabilidad en sucesos.

El profesor escuchará con atención las opiniones de los alumnos, y motivará su participación, en ningún momento calificará de erróneo nada de lo dicho , intentando sacar la parte positiva de toda opinión para llegar a su fin.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Intentar llevar mediante el debate y un ejercicio explicativo a los alumnos hacia la deducción de la necesidad del uso de la regla de Laplace en el cálculo de probabilidades.

### **Tarea 3** (Duración aproximada 20')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor realiza un ejemplo en la pizarra donde se recuerdan las definiciones del suceso unión e intersección, así como la diferencia de sucesos, con la finalidad de calcular la probabilidad de dichos sucesos. Durante el ejercicio se introducen las fórmulas de la Probabilidad de la Unión dependiendo de si los sucesos son compatibles o incompatibles.

Se lanza un dado dos veces. Considerar los sucesos A: la suma de los resultados es 5, B: la diferencia de los resultados obtenidos es 1 y C: el resultado de ambos lanzamientos es impar. Describir:

- El espacio muestral
- Escribe con tus palabras lo que significan los sucesos:  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$ ,  $(A \cap B) \cap C$ ,  $A - B$ ,  $B - C$
- Construye los sucesos contrarios de A y C.
- ¿Son compatibles o incompatibles los sucesos A, B y C?
- Calcula las probabilidades de todos los sucesos anteriores.

Material y recursos necesarios: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en particular.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: El profesor pretende introducir la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos a través de un ejemplo.

#### **Tarea 4** (Tarea obligatoria para realizar en casa)

La probabilidad de que un estudiante, A, apruebe matemáticas es 0'6, mientras que la de que otro estudiante, B, apruebe la asignatura es 0'5. Además, la probabilidad de que apruebe A y no apruebe B es 0'3. Calcula la probabilidad de que:

- Solo apruebe B
- Aprueben los dos
- Apruebe al menos uno de los dos
- Apruebe A pero no apruebe B
- No apruebe ninguno de los dos.

---

#### **Tarea 5** (Tarea voluntaria para realizar en casa)

Una aerolínea en particular tiene vuelos a las 10 a.m. de Madrid a Barcelona, París y Frankfurt. Denotemos por A al evento de que el vuelo a Barcelona está completo y denotamos los eventos B y C análogamente para los otros dos vuelos. Supongamos que  $P(A)=0'6$ ;  $P(B)=0'5$  y  $P(C)=0'4$  y que los tres eventos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que:

- Los tres vuelos estén completos.
- De que al menos uno de los vuelos no esté completo
- Solo el vuelo a Barcelona esté completo
- De que exactamente uno de los tres vuelos esté completo.

## **SESIÓN 3: PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO. REPRESENTACIONES GRÁFICAS: PROBABILIDAD COMO ÁREA Y DIAGRAMAS DE VENN**

Análisis del contenido de la sesión

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Uno de los resultados esperados tras esta sesión es la comprensión de la probabilidad como un concepto extraíble de la teoría matemática con capacidad de ser representado de forma gráfica. Por otra parte, se intentará un acercamiento a la idea de sistema completo de sucesos como división del espacio total en dos partes.

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

La comprensión de la probabilidad es una cadena de conocimientos que involucra a todas las sesiones anteriores. En el caso de esta tercera sesión, se recordarán conceptos de sesiones anteriores como suceso contrario o espacio muestral y a su vez se utilizarán en futuras sesiones conocimientos como la representación de diagramas de Venn en la resolución de problemas.

Contenidos básicos:

- Recordatorio del concepto de suceso contrario a uno dado. Ejemplificación y construcción del mismo.
- Aplicación de  $P(E)=1$  para hallar la probabilidad del suceso contrario a un suceso dado, conocida de antemano su probabilidad.
- Elaboración de diagramas de Venn
- Identificación gráfica de operaciones entre conjuntos en un diagrama de Venn.
- El diagrama de Venn como ayuda en el planteamiento y la resolución de problemas.
- Relación de la probabilidad con porciones de un recinto.

Situaciones y contextos: Científico y social

Sistemas de representación: Verbal y gráfico

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Dominio del espacio muestral	
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.
5	Construir el suceso contrario a uno dado

Probabilidad con experimentos simples	
10	Dominar las propiedades básicas de la probabilidad.
12	Expresar e interpretar la probabilidad geoméricamente como un área

### Secuencia de tareas:

#### **Tarea 1** Corrección del ejercicio voluntario (duración aproximada 10')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*El profesor pregunta a los alumnos que han hecho el ejercicio voluntario para que alguno de ellos salga a la pizarra y resuelvan el ejercicio que propuso el día anterior en clase, de esa forma, al resolverlo, el profesor irá preguntando al resto de alumnos si están de acuerdo con sus resultados y si no es así, se irán resolviendo las dudas.*

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo-clase.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se intenta motivar al alumno para que sea él mismo quien se dé cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todos los alumnos un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

#### **Tarea 2** (Duración aproximada 10')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor enlaza la sesión anterior con la actual recordando a los alumnos el concepto de suceso contrario a uno dado. A continuación, razonando que el espacio total es unión de un suceso y su contrario y añadiendo que la probabilidad del total es uno, se llega a la conclusión de que la probabilidad del suceso contrario a uno dado es igual a uno menos la probabilidad de dicho suceso. Se ejemplifica este nuevo razonamiento mediante el siguiente ejercicio:

*Consideramos el experimento consistente en lanzar un dado. Sea A el suceso de 'obtener 5 en el dado rojo' con probabilidad  $1/6$ . Calcula:*

- a) El suceso contrario al suceso A.*
- b) Su probabilidad.*

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con los alumnos verbalmente en la resolución del ejercicio.

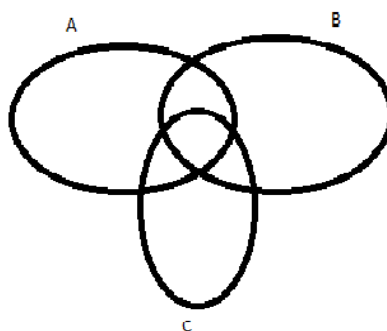
Comentarios sobre las intenciones del profesor: Que comprendan mediante un ejemplo sencillo que el espacio total es unión de un suceso y su contrario y que la probabilidad total es 1.

### **Tarea 3** (Duración aproximada 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*El profesor dibuja en la pizarra el siguiente diagrama de Venn, de tres conjuntos con intersección no vacía, y denota a los mismos como A, B y C. Pedirá la colaboración de distintos alumnos para que rellenen las áreas correspondientes a operaciones entre ambos conjuntos:  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $E - B$ ,  $C - (A \cap B)$ ,  $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ .*

*Expresa el conjunto contrario de A mediante operaciones entre conjuntos de dos formas distintas.*



Material o recurso necesario:

Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula:

El profesor interactúa con los alumnos.

Comentarios sobre las intenciones del profesor:

El profesor recuerda a los alumnos las nociones de teoría de conjuntos vistas en anteriores cursos.

### **Tarea 4** (Duración aproximada 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*Dividimos la clase en grupos de tres personas. En los ordenadores se les pide que interactúen con el programa que representa distintos sucesos como colores en una ruleta. Se requerirá que aumenten el área correspondiente a uno de los colores y que vean qué efectos tiene en el recuento de resultados de las tiradas. Al concluir las observaciones se pondrán en común las conclusiones obtenidas.*

Material o recurso necesario: Ordenador

Previsiones sobre la gestión del aula: Trabajo por tríos

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de que los alumnos vean intuitivamente que la probabilidad se aproxima a uno al ir aumentando el área de un suceso en el programa.



**Tarea 5** (Tarea obligatoria para realizar en casa)

1) Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B: (Ayúdate de un diagrama de Venn para su resolución)

138 personas consumían A pero no B.  
206 personas consumían A y B.  
44 personas no consumían ni A ni B.

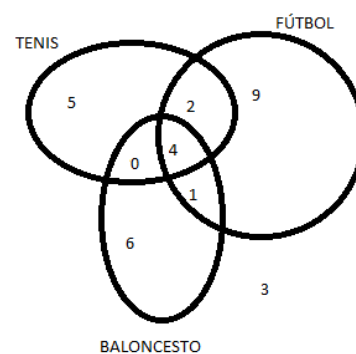
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar consuma A?
- ¿Y de que consuma B?
- ¿Cuál es la probabilidad de que consuma B pero no A?
- ¿Cuál es la probabilidad de que consuma por lo menos uno de los dos productos?

**Tarea 6** (Tarea voluntaria para realizar en casa)

En el siguiente diagrama, se han representado los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, donde se les preguntó si practicaban tenis, fútbol o baloncesto. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: practican tenis, practican tenis y fútbol, practican fútbol, practican los tres deportes, practican baloncesto, ninguno de los tres deportes, etc.

Elegida una persona al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que practique baloncesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique fútbol?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique fútbol y tenis?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no practique tenis?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ni tenis ni baloncesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique los tres deportes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique por lo menos uno de los tres deportes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique sólo uno de los tres deportes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique sólo fútbol y baloncesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de los tres deportes?



k) ¿Cuál es la probabilidad de que practique alguno de esos deportes?

## **SESIÓN 4: PROBABILIDAD COMPUESTA. DIAGRAMAS DE ÁRBOL**

Análisis del contenido de la sesión

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Introducir al alumno en el concepto de probabilidad compuesta, así como que entiendan la utilidad de los diagramas de árbol y se familiaricen con ellos (a la hora de construirlos e interpretarlos). Para ello, se introducirán los conceptos nuevos a través de ejemplos que nos conducirán a las definiciones. Posteriormente, se afianzarán estos conceptos con más ejemplos.

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores :

Inicialmente se dedicarán unos minutos a la corrección del ejercicio o ejercicios voluntarios mandados el día anterior: uno de los alumnos voluntarios explica su ejercicio en la pizarra; el resto de alumnos que también lo hayan realizado, se lo entregarán al profesor.

Esta sesión y la siguiente van unidas ya que en ambas se trabajan los experimentos compuestos. Es importante que el alumno ya haya mecanizado el cálculo de probabilidades simples mediante la regla de Laplace.

Contenidos básicos:

- Experimentos compuestos.
- Diagramas de árbol.
- Extracciones con y sin devolución.
- Regla del producto.
- Técnicas de recuento.

Situaciones y contextos: Personal, Educativa y Pública.

Sistemas de representación:

- Simbólico, numérico, verbal.
- Gráfico: diagramas de árbol.

Material manipulativo: Monedas

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Foco 3: Probabilidad compuesta	
16	Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den. (RP, R, LS)
17	Comprender y usar la regla del producto (PR, AJ, RP)
21	Saber identificar técnicas de recuento: Variaciones, combinaciones y permutaciones sin repetición.(PR, AJ, RP,LS)
22	Clasificar un experimento compuesto en los contextos a los que corresponda (AJ, C, M)

### Secuencia de tareas:

#### **Tarea 1** Corrección del ejercicio voluntario (duración aproximada 10')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor pregunta a los alumnos que han hecho el ejercicio voluntario para que alguno de ellos salga a la pizarra y resuelvan el ejercicio que propuso el día anterior en clase, de esa forma, al resolverlo, el profesor irá preguntando al resto de alumnos si están de acuerdo con sus resultados y si no es así, se irán resolviendo las dudas.

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo-clase.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se intenta motivar al alumno para que sea él mismo quien se dé cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todos los alumnos un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

#### **Tarea 2** (Duración aproximada 15')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Mediante las siguientes actividades se pretende introducir el concepto de experimento compuesto, diagrama de árbol y regla del producto, el profesor las realizará conjuntamente con los alumnos en la pizarra.

● *Mi hermana y yo decidimos hacer un juego para ganar dinero: lanzamos a la vez dos monedas al aire, si las dos monedas salen cara, mi hermana me tiene que pagar 5€, en otro caso, se los tengo que pagar yo a ella. Se repite la acción 10 veces y gana el que tenga más dinero.*

- ¿Crees que es justo el procedimiento?*
- ¿Qué jugador prefieres ser: mi hermana o yo?*

c) Si repitiéramos el juego 1000 veces, ¿Cuánto dinero crees que obtendríamos cada una?

*Inventa otros juegos que sean equitativos.*

- *Un jugador lanza tres veces una moneda, si obtiene tres caras gana 100€, si obtiene una o dos caras gana 10€ y si no obtiene ninguna cara pierde 160€. ¿Es justo el juego?*

Material o recurso necesario: Monedas

Previsiones sobre la gestión del aula: Se divide el aula en dos grupos: los que quieran ser mi hermana y los que quieran ser yo. Se elige un representante de cada grupo para que lancen las monedas.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de hacer ver a los alumnos que es necesario el uso de una nueva herramienta (diagramas de árbol) para estudiar estos experimentos. Se pretende captar su atención y motivarles para los nuevos conceptos que se van a introducir en esta sesión.

### **Tarea 3** (Duración aproximada 10')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor realiza el siguiente ejercicio en la pizarra para mostrar la utilidad de los diagramas de árbol, y lo fácil que pueden solucionarse algunos ejercicios utilizando dicha herramienta.

*En una clase de infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*

- Seleccionar 3 niños.*
- Seleccionar 2 niños y una niña.*
- Seleccionar, al menos, un niño.*

Material o recurso necesario: Ninguno.

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de que los alumnos vean la utilidad de los diagramas de árbol.

### **Tarea 4** (Duración aproximada 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor realiza los siguientes ejercicios en la pizarra para introducir los conceptos de extracción con y sin devolución y las técnicas de recuento (en este caso combinaciones).

- 1) *En una caja hay 6 bolas: 4 blancas y 2 rojas. Se extrae una bola, se anota el color y se repite el mismo proceso 3 veces más. ¿Cuál es la probabilidad de obtener las bolas BBRB y en ese orden?*
  - a) *Con devolución*

b) Sin devolución

- 2) En un centro agrícola experimental se han preparado 20 injertos para ser sembrados en un invernadero. De ellos 8 son especie X (resistentes al frío) y el resto son especie Y. Aleatoriamente se han tomado 3 injertos. Hallar la probabilidad de que por lo menos uno de ellos sea especie X.

Material o recurso necesario: Ninguno

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de que los alumnos vean la diferencia entre hacer una extracción con devolución o sin devolución y el cambio de los respectivos diagramas de árbol.

### Tarea 5 (Tareas obligatorias para realizar en casa)

- 1) Tras un estudio estadístico en una ciudad se observa que el 70% de los motoristas son varones y, de estos, el 60% llevan habitualmente casco. El porcentaje de mujeres que conducen habitualmente con casco es del 40%. Calcular la probabilidad de que un motorista elegido al azar lleve casco.
- 2) Un estudiante de Estadística se dispone a realizar un estudio sobre el tipo y las condiciones de la comida que su madre le sirve a diario. Para ello establece las siguientes clasificaciones:

Estado de Sal	Salada	Normal	Sosa	
Temperatura	Caliente		Fría	
Tipo de alimento	Carne	Pescado	Verduras	Pasta

Obtenga, utilizando un diagrama de árbol, el espacio muestral del tipo y las condiciones de las comidas.

- 3) El 35% de los créditos de un banco es para vivienda, el 50% para industrias y el 15% para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivienda, el 15% de los créditos para industrias y el 70% de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.
- 4) Tenemos dos urnas, en la primera hay 5 bolas rojas, 4 blancas y 3 verdes. En la segunda hay 5 bolas rojas, 5 blancas y 7 verdes. Extraemos una bola de cada urna.
  - a) ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
  - b) ¿y de que sean de distinto color?(Realiza los diagramas de árbol correspondientes para su resolución)

### Tarea 6 (Tareas voluntarias para realizar en casa)

- 1) Siete personas han solicitado trabajo para cubrir dos vacantes. ¿De cuántos modos pueden llenarse las vacantes, si:
  - La primera persona seleccionada recibe más salario que la segunda.

- *No hay diferencia entre las vacantes.*

2) *Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?*

## **SESIÓN 5: PROBABILIDAD CONDICIONADA.TABLAS DE CONTINGENCIA**

Análisis del contenido de la sesión:

### Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Esta es una sesión dedicada por completo a la probabilidad condicionada. Se pretende realizar una actividad introductoria con el ordenador con carácter motivador y para captar la atención de los alumnos.

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores: Inicialmente se dedicarán unos minutos a la corrección del ejercicio o ejercicios voluntarios mandados el día anterior: uno de los alumnos voluntarios explica su ejercicio en la pizarra; el resto de alumnos que también lo hayan realizado, se lo entregarán al profesor.

Ésta es la última sesión en la que se introducen nuevos contenidos.

### Contenidos básicos:

- Dependencia e independencia de sucesos
- Relación entre intuición y probabilidad
- Probabilidad condicionada
- Tablas de contingencia

Situaciones y contextos: Personal. Social. Científica. Educativa

### Sistemas de representación:

- Simbólico
- Numérico
- Verbal
- Gráfico: tablas de contingencia

Material manipulativo: Ordenador.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Foco 3: Probabilidad compuesta	
15	Distinción de sucesos dependientes e independientes. (PR, C, LS)
18	Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada. (PR, AJ, RP)
19	Expresar e interpretar datos de tablas de contingencia. (C, RP, R)
20	Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana (AJ, C, M,HT)

### Secuencia de tareas:

#### **Tarea 1** Corrección del ejercicio voluntario (duración aproximada 10')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor pregunta a los alumnos que han hecho el ejercicio voluntario para que alguno de ellos salga a la pizarra y resuelvan el ejercicio que propuso el día anterior en clase, de esa forma, al resolverlo, el profesor irá preguntando al resto de alumnos si están de acuerdo con sus resultados y si no es así, se irán resolviendo las dudas.

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se intenta motivar al alumno para que sea él mismo quien se dé cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todos los alumnos un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

#### **Tarea 2** (Duración aproximada 10')

##### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor realiza este ejercicio sencillo en la pizarra sin detenerse demasiado, a través de este ejemplo se pretende introducir el concepto de probabilidad condicionada y su correspondiente fórmula. Se define también cuando dos sucesos son dependientes e independientes, aprovechando para hacerles ver que en las extracciones con devolución los sucesos son independientes, mientras que en las extracciones sin devolución, son dependientes.

● *Se lanza dos veces un dado equilibrado. Si se sabe que la suma de los lanzamientos ha sido 8, nos interesa saber cuál será la probabilidad de que en el primer lanzamiento se haya obtenido un 5.*

- *De una caja que contiene 4 bolas rojas y 3 blancas se extraen sucesivamente 2 bolas con reemplazamiento. Queremos determinar la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda blanca.*

Material o recurso necesario: Ninguno

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Hacer ver a los alumnos la importancia de la probabilidad condicionada (cómo el hecho de tener información afecta a la probabilidad), y se pretende también que comprendan que la independencia de los sucesos es consecuencia de la forma de realizar el experimento.

### **Tarea 3** (Duración aproximada 10')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

*Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:*

- 1) Probabilidad de que sea defectuosa.*
- 2) Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina.*

Material o recurso necesario: Ninguno

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial

Comentarios sobre las intenciones del profesor: El profesor requerirá en todo momento de la participación activa de los alumnos mediante preguntas.

### **Tarea 4** (Duración aproximada 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Primeramente, el profesor realiza experimentalmente algunos de los apartados. Se pide a un voluntario que salga a la pizarra e intente resolverlo. Este alumno será ayudado por sus compañeros, y el profesor les va guiando en el transcurso de la actividad.

*Extraemos una carta de una baraja española.*

- a) Halla la probabilidad de haber obtenido una figura de espadas sabiendo que la carta no es de copas.*
- b) Halla la probabilidad de haber obtenido un rey sabiendo que no es de espadas.*
- c) Halla la probabilidad de haber obtenido copas sabiendo que la carta es un rey.*



- d) Halla la probabilidad de que sea figura sabiendo que ha salido un 3.
- e) Halla la probabilidad de que haya salido un 6 sabiendo que no ha salido figura.
- f) Halla la probabilidad de que haya salido el As de oros sabiendo que ha salido impar.

Material o recurso necesario: Una baraja española.

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Es una tarea para afianzar los conceptos adquiridos en la tarea anterior.

**Tarea 5** (Duración aproximada 15')

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor realiza en la pizarra una tabla de contingencia 2x2, explicando lo que es y cómo se construye a través de este ejemplo. El resto de apartados los resuelve también el profesor enseñando a los alumnos cómo se leen las tablas de contingencia.

A partir de la siguiente tabla de contingencia:

		SEXO		
		HOMBRE	MUJER	MARGINAL
FUMA	SI	65	58	123
	NO	43	67	110
	MARGINAL	108	125	233

En esta tabla se puede observar en primer lugar que de los 233 individuos de los que se tiene información 108 son hombres y 125 son mujeres. Asimismo se sabe que 123 de ellos fuman y 110 no. La tabla de contingencia nos permite tener información cruzada sobre ambas variables: de los 108 hombres, 65 fuman y 43 no, mientras que en el caso de las mujeres, 58 fuman y 67 no.

*Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:*

- a) Que fume
- b) Que no sea mujer
- c) Que sea mujer y fume
- d) Que no sea hombre y no fume
- e) Que fume sabiendo que es hombre
- f) Que no fume sabiendo que no es mujer

Material o recurso necesario: Ninguno

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna en especial

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se trata de hacer ver a los alumnos la utilidad y la eficacia de esta herramienta que son las tablas de contingencia.

**Tarea 6** (Tareas obligatorias para realizar en casa)

- 1) *¿Tiene igual probabilidad el suceso “obtener un rey condicionado a que la carta escogida haya sido figura” que el suceso “obtener una figura condicionado a que la carta ha sido rey”?* *Calcúlalas.*
- 2) *En un dado bien construido consideramos los sucesos A y B, tales que  $A = \{\text{obtención de una puntuación mayor o igual que 4}\}$  y  $B = \{\text{salir 3 o 6}\}$ .*
  - a) *Los sucesos de A y B son disjuntos.*
  - b) *Explica con tus palabras si crees que se trata de sucesos dependientes o independientes. Comprueba tu respuesta calculando las probabilidades  $P(A \cap B)$  y las probabilidades  $P(A)$  y  $P(B)$ .*
- 3) *El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55 % de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40 % de los hombres votan al partido A y el 50 % al B. El 60 % de las mujeres votan al partido A y el 20 % al B. El resto de electores no vota.*
  - a) *Realice la tabla de contingencia.*
  - b) *Elegida una persona al azar, halla las siguientes probabilidades:*
    - *Que dicha persona no vote.*
    - *Que vote al partido A sabiendo que es mujer.*
    - *Que sea hombre sabiendo que ha votado al partido B.*
    - *Que sea mujer sabiendo que no ha votado.*
    - *Que no sea mujer.*

**Tarea 7** (Tarea voluntaria para realizar en casa)

*Un mayorista tiene 200 clientes clasificados en la siguiente tabla según si realizan pedidos regularmente o de forma esporádica y según si efectúan el pago al contado o a través de créditos:*

Tipo de Pedido	Forma de Pago	
	Al contado	Crédito
Regular	10	15
Esporádico	20	155

*En el marco de una campaña publicitaria, el mayorista decide sortear un viaje entre sus clientes eligiendo uno de ellos al azar.*

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente elegido al azar realice pedidos de forma regular o bien utilice créditos para efectuar sus pagos?*
- b) Calcule la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice pedidos regularmente si sabemos que el elegido efectúa sus pagos mediante créditos.*
- c) Calcule la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice los pagos mediante crédito si sabemos que realiza pedidos regularmente.*
- d) ¿Son independientes los sucesos “comprar a crédito” y “comprar regularmente”?*

## SESIÓN 6: REPASO. CORRECCIÓN DE LA RELACIÓN DE EJERCICIOS

Análisis del contenido de la sesión:

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Esta sesión es de repaso. Se trata de corregir la relación de ejercicios que se entregó a los alumnos el primer día de clase para que fueran resolviéndolo a lo largo de la Unidad. La finalidad de esta sesión es doble: por un lado, terminar de afianzar los conocimientos, y por otro lado, solucionar dudas y ver los apartados y contenidos donde se cometen más errores.

En esta sesión, los alumnos que hayan hecho los ejercicios de la relación pueden salir voluntarios a la pizarra, lo que se tendrá en cuenta positivamente para la evaluación (como los demás ejercicios voluntarios).

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Puesto que es la última sesión antes del examen, no sólo corregiremos el ejercicio voluntario del día anterior, y todos los ejercicios que se tengan dudas de la relación, sino también los obligatorios. Así los alumnos tienen en su haber todas las tareas corregidas para poder prepararse adecuadamente el examen.

Contenidos básicos: Todos los contenidos de la Unidad Didáctica, ya vistos en las sesiones anteriores.

Situaciones y contextos: Personal., Social, Científica y Educativa.

Sistemas de representación: Simbólico, numérico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Foco 1: Dominio del espacio muestral	
1	Distinguir entre experimentos deterministas y experimentos aleatorios
2	Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.
4	Identificar los sucesos seguros e imposible de un experimento aleatorio
5	Construir el suceso contrario a uno dado
6	Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles

Foco 2: Probabilidad con experimentos simples	
7	Comprender la noción de probabilidad como límite de las frecuencias relativas
8	Reconocer y plantear situaciones de equiprobabilidad
9	Identificar los casos favorables y casos posibles en un experimento
10	Dominar las propiedades básicas de la probabilidad
11	Comprender y usar la regla de Laplace
12	Expresar e interpretar la probabilidad geoméricamente como un área
13	Elaborar enunciados de problemas acorde con unos datos probabilísticos
14	Clasificar un experimento simple en los contextos a los que corresponda

Foco 3: Probabilidad compuesta	
15	Distinción de sucesos dependientes e independientes.
16	Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den.
17	Comprender y usar la regla del producto
18	Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.
19	Expresar e interpretar datos de tablas de contingencia.
20	Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana
21	Clasificar un experimento compuesto en los contextos a los que corresponda

## Secuencia de tareas:

**Tarea 1** Corrección de los ejercicios planteados en la sesión anterior (duración aproximada 15')

### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor pregunta a los alumnos que han hecho el ejercicio voluntario para que alguno de ellos salga a la pizarra y resuelvan el ejercicio que propuso el día anterior en clase, de esa forma, al resolverlo, el profesor irá preguntando al resto de alumnos si están de acuerdo con sus resultados y si no es así, se irán resolviendo las dudas.

Material o recurso necesario: Ninguno específico

Previsiones sobre la gestión del aula: El profesor interactúa con el grupo-clase.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Se intenta motivar al alumno para que sea él mismo quien se dé cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todos los alumnos un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

**Tarea 2** Relación de ejercicios (Duración aproximada 45')

### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Los alumnos voluntarios realizan las tareas en la pizarra explicando razonadamente los pasos que sigue. El resto atienden y responden a las preguntas planteadas por el profesor, y ayudan a su compañero a resolver los posibles errores o dudas.

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna específica.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Afianzar conocimientos, resolver dudas y prepararse para el examen.

**(La relación de ejercicios se adjunta en el Anexo I)**

## **SESIÓN 7: EXAMEN**

Análisis del contenido de la sesión:

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Se trata de una parte fundamental pero no única en la evaluación de los alumnos. La intención es cuantificar el nivel de comprensión de los conceptos impartidos en las cinco primeras sesiones.

Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores: En la sesión anterior, se realizaron una serie de problemas referentes a los mismos conceptos que se manejan en los problemas del examen. De este modo, los alumnos verán que una prueba de evaluación como esta no es algo distinto a lo enfocado durante el tema.

Contenidos básicos: Todos los contenidos de la Unidad Didáctica, ya vistos en las sesiones anteriores.

Situaciones y contextos: Personal, Social, Científica y Educativa.

Sistemas de representación: Simbólico, numérico y gráfico.

Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:

Foco 1: Dominio del espacio muestral	
2	Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio
3	Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.
5	Construir el suceso contrario a uno dado
6	Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles

Foco 2: Probabilidad con experimentos simples	
8	Reconocer y plantear situaciones de equiprobabilidad
9	Identificar los casos favorables y casos posibles en un experimento
10	Dominar las propiedades básicas de la probabilidad
11	Comprender y usar la regla de Laplace
13	Elaborar enunciados de problemas acorde con unos datos probabilísticos

Foco 3: Probabilidad compuesta	
15	Distinción de sucesos dependientes e independientes.
16	Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den.
17	Comprender y usar la regla del producto
18	Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.
19	Expresar e interpretar datos de tablas de contingencia.

## Secuencia de tareas:

### **Tarea 1** EXAMEN (Duración aproximada 60')

#### Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Los alumnos realizan de forma individual las siguientes tareas propuestas, pudiendo preguntar al profesor dudas referentes a los enunciados.

Material o recurso necesario: Ninguno específico.

Previsiones sobre la gestión del aula: Ninguna específica.

Comentarios sobre las intenciones del profesor: Comprobar el nivel de asimilación de los conceptos impartidos.

#### EXAMEN:

- 1) Se extrae al azar una carta de una baraja francesa. Sabiendo que los palos posibles son corazones, picas, diamantes y tréboles y que la numeración de las cartas de cada palo es A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q y K, halla las siguientes probabilidades:
  - a) Que sea un as o una reina.
  - b) Que sea una figura.
  - c) Que sea un corazón o un trébol.
  - d) Que sea un número superior a 6.
  - e) Que no sea figura.
  
- 2) En una urna hay 5 bolas: 3 azules y 2 verdes. Se extrae una bola, se anota el color y se repite el mismo proceso otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas azules? ¿Cuál es la probabilidad de que la primera será verde y la segunda azul? (Construye los diagramas de árbol necesarios según el caso)
  - a) Con devolución
  - b) Sin devolución
  
- 3) De los créditos concedidos por un banco, un 42% lo son para clientes nacionales, un 33% para clientes de la Unión Europea y un 25% para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30%, un 24% y un 14% según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?
  
- 4) Un grupo de investigación realiza una encuesta acerca de los idiomas que hablan los individuos de una población. Cuestiona a los individuos en relación a: si hablan algún idioma (francés o inglés) y si son partidarios de que se exija un idioma extranjero para incorporarse al mundo laboral. De los 1670 encuestados, 758 hablan inglés, y dentro de ese sector, 142 son

partidarios de que exijan un idioma extranjero para incorporarse al mundo laboral. Dentro de los que hablan francés, 95 son partidarios de que se exija un idioma extranjero para incorporarse al mundo laboral.

- a) Construye la tabla de contingencia correspondiente.
- b) Escribe el espacio muestral de este experimento.
- c) Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:

- Que sea partidario de que se exija un idioma extranjero
- Que no sea partidario de que se exija un idioma extranjero y hable francés.
- Que no sea partidario de que se exija un idioma extranjero y no hable inglés.
- Que sea partidario de que se exija un idioma extranjero y hable los dos idiomas.

- 5) En una consultoría, el 40% de los trabajadores están casados, y el 8% de los hombres casados y el 12% de las mujeres casadas tienen hijos. Escogido al azar un trabajador, calcula la probabilidad de que: Esté casado/a, que tenga hijos sabiendo que está casado/a, que no tenga hijos y esté casado/a, que no tenga hijos.

## **EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA**

### Criterios de evaluación:

1. Describe espacios muestrales finitos asociados a experimentos aleatorios simples.
2. Describe distintos tipos de sucesos aleatorios y opera con ellos: unión, intersección, diferencia, complemento u opuesto, etc.
3. Utiliza diagramas de Venn para comprender y describir las distintas operaciones con sucesos.
4. Distingue experimentos compuestos describiendo formalmente los experimentos simples que lo componen y describe el espacio muestral asociado.
5. Expresa correctamente la Ley de los grandes números y la utiliza para determinar frecuencias relativas asociadas a experimentos sencillos.
6. Sabe diferenciar entre sucesos compatibles e incompatibles.
7. Conoce la Ley de Laplace y la utiliza correctamente para asociar probabilidades a sucesos aleatorios de experimentos con un espacio muestral finito.
8. Conoce la definición de los principales números combinatorios y los utiliza para calcular casos favorables y casos posibles en distintos contextos en los que se puede aplicar la Ley de Laplace.
9. Conoce y maneja las propiedades básicas de la probabilidad
10. Sabe distinguir entre sucesos dependientes e independientes y conoce la implicación de ello para el desarrollo de los problemas.
11. Aplica de forma adecuada la fórmula de la probabilidad condicionada y la regla del producto.
12. Conoce y utiliza los teoremas de la probabilidad compuesta, de la probabilidad total y el de Bayes para el desarrollo teórico y práctico de ejercicios y problemas.
13. Sabe expresar, construir e interpretar diagramas de árbol y tablas de contingencia para afrontar y resolver situaciones problemáticas susceptibles de ser tratadas con estas estrategias.
14. Interpreta con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana.



### Instrumentos de evaluación:

- Anotación de las actuaciones que vaya teniendo el alumno tales como: participación en clase, ya sea trabajando con los compañeros o con preguntas y sugerencias sobre el tema.
- Datos y trabajos aportados por el alumno, como:

**Prueba escrita:** Abarcará el contenido visto en las cinco sesiones anteriores. Este mecanismo de evaluación pienso que es necesario, ya que asegura al profesor que el conjunto de contenidos del tema se ha asimilado y sirve a la vez para detectar los posibles errores y dificultades para poder mejorar en sesiones futuras.

**Cuaderno de trabajo:** se valorará que esté completo, limpio, ordenado, con explicaciones razonadas, etc.

**Tareas para casa:** Tanto las obligatorias como las voluntarias. Los alumnos deberán entregarlas al profesor al comienzo de la siguiente sesión. Cada relación de ejercicios de cada sesión (ya sea un ejercicio por sesión o varios) se valorará sobre diez y se hará la media aritmética entre las 5 relaciones.

**Comportamiento:** se valorará positivamente la ayuda a sus compañeros y a la buena marcha de la clase, así como la corrección en el trato con todos.

**Trabajo opcional:** Este trabajo es de carácter totalmente optativo y consiste en lo siguiente: El profesor al iniciar la unidad didáctica, propondrá que se investigue sobre algún tema determinado que tenga que ver con la probabilidad (por ejemplo, que realicen un trabajo sobre la historia de la probabilidad), y al finalizar dicha unidad, la persona o personas que han realizado el trabajo tienen que salir a la pizarra y exponerlo al resto de sus compañeros. El objetivo de esta tarea es doble: por un lado acostumbrarlos a utilizar las nuevas tecnologías (internet) y por otro lado, que vayan poco a poco perdiendo la vergüenza y aprendiendo a exponer en público frente a sus compañeros.

### Ponderación de los instrumentos de evaluación:

Cuaderno de trabajo y tareas para casa (10%)  
Comportamiento y participación (5%)  
Prueba escrita (85%)

Además, a la nota obtenida se le suma:

- 0'1 por cada ejercicio voluntario entregado.
- 0'5 por el trabajo opcional.

## **ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD**

Las tareas que propongo a mis alumnos en las diferentes sesiones de la misma, atenderán a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, así como a sus intereses. Serán de dificultad graduada. Se dispondrá de una batería de tareas de refuerzo y de ampliación (que no se penalizarán al ser de un nivel de dificultad superior al exigido) para que, tanto los alumnos con dificultades de

aprendizaje, como los que tienen capacidad para profundizar en los contenidos puedan superar la evaluación de la unidad didáctica y/o ampliar sus conocimientos sobre la misma.

**En el Anexo II se pueden ver la relación de actividades de refuerzo y la relación de actividades de ampliación.**

## PROYECTO INDIVIDUAL

Como proyecto personal, durante mi estancia de prácticas en el I.E.S. Padre Suárez, he llevado a cabo un estudio acerca de la concepción que tienen los alumnos de bachillerato sobre la noción de probabilidad y de probabilidad condicionada, así como los errores y dificultades interpretativas más frecuentes en dichos conceptos. Para tal fin he diseñado un cuestionario con 9 ítems, dicho cuestionario ha sido pasado a 18 alumnos de dos cursos de Bachillerato, uno de 1º Bachillerato y otro de 2º Bachillerato, ambos de la rama de Ciencias Sociales.

El cuestionario es el siguiente: Test: Concepto de Probabilidad y de probabilidad condicionada

**Ítem 1:** ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar 5 veces una moneda equilibrada? ¿Por qué?

- a) CCCXX
- b) XCCXC
- c) XCXXX
- d) CXCXC
- e) Las cuatro sucesiones son igual de probables

Razonamiento:

**Ítem 2:** Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo. Tres veces seguidas se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta esas tres veces? ¿Por qué?



- a) 2 1 5 en este orden
- b) Obtener los números 2,1, 5, en cualquier orden
- c) Obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden
- d) Las opciones a y b son igual de verosímiles
- e) Las opciones a, b y c son igual de verosímiles

Razonamiento:

**Ítem 3:** ¿Cuál es la altura media más probable de una muestra de 3000 hombres elegidos al azar? ¿Cuál es la altura media más probable de una muestra de 10 hombres elegidos al azar?

**Ítem 4:** Cuando lanzamos tres dados simultáneamente ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? ¿Por qué?

- a) Obtener un 5, un 3 y un 6
- b) Obtener dos veces el 5 y una vez el 3
- c) Obtener tres veces el número 5
- d) Todos estos resultados son igualmente probables

Razonamiento:

**Ítem 5:** En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción? ¿Por qué?

- a) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
- b) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
- c) Las dos cajas dan la misma posibilidad

Razonamiento:

**Ítem 6:** Supón que Rafa Nadal alcanza la final de Roland Garros en 2014. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable? ¿Por qué?

- a) Rafa Nadal pierde el primer set
- b) Rafa Nadal pierde el primer set pero gana el partido
- c) Los dos sucesos son iguales de probables

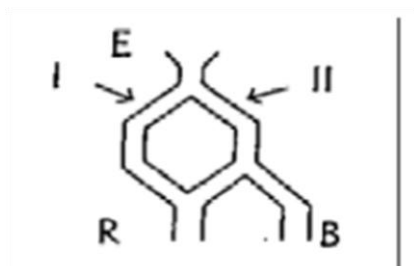
Razonamiento:

**Ítem 7:** Un test de diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Cuál de las siguientes predicciones consideras más probable? ¿Por qué?

- a) Predecir que una persona tiene cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico
- b) Predecir un resultado positivo en el test de diagnóstico, si la persona tiene cáncer
- c) Creo que a y b son igual de probables

Razonamiento:

**Ítem 8:** Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado po el canal I? ¿Por qué?



- a) 0'50
- b) 0'66
- c) 0'33
- d) No se puede calcular

Razonamiento:

**Ítem 9:** Se extrae una carta al azar de una baraja española ( 40 cartas con 4 palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota, caballo y rey). Sea A el suceso “se extrae una carta de oros” y B el suceso “se extrae un rey”, ¿los sucesos A y B son independientes?

- a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
- b) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.
- c) Sí, porque  $P(\text{rey de oros}) = P(\text{rey}) \cdot P(\text{oros})$
- d) No, porque  $P(\text{rey/oros}) \neq P(\text{rey})$

# BIBLIOGRAFÍA



## Libros de consulta:

- ▶ Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º Bachillerato. Ed: Anaya
- ▶ Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I de 1º Bachillerato. Ed: Anaya
- ▶ Matemáticas de 2º Bachillerato. Ed: SM
- ▶ Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º y 2º Bachillerato. Ed: Vicens Vives
- ▶ Cálculo de Probabilidades. Ed: Anaya
- ▶ Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º Bachillerato. Ed: Editex
- ▶ Apuntes de internet: Ejercicios Resueltos de Probabilidad. Cálculo de Probabilidades
- ▶ Historia de la probabilidad.



## Páginas web:

- ▶ <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vLibrary.html>
- ▶ <http://www.isftic.mepsyd.es/w3/recursos/bachillerato/matematicas/probabilidad/index.html>
- ▶ <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Spinner/Index.html>
- ▶ [http://www.planetamatematico.com/index.php?option=com\\_content&task=view&id=118&Itemid=158](http://www.planetamatematico.com/index.php?option=com_content&task=view&id=118&Itemid=158)

# ANEXOS

## ANEXO I: RELACIÓN DE EJERCICIOS

- 1) Una bolsa tiene canicas rojas, verdes, amarillas y azules y rosas. Halla las siguientes probabilidades:
  - a) Que la canica sea amarilla.
  - b) Que sea roja o verde.
  - c) Que no sea azul.
  - d) Que no sea ni roja ni amarilla.
  - e) Que sea verde, amarilla o azul.
  
- 2) Supongamos que una residencia estudiantil está conformada por:
  - 30% de estudiantes de primer año, de los cuales el 10% poseen coche.
  - 40% de estudiantes de segundo año, de los cuales el 20% poseen coche.
  - 20% de estudiantes de tercer año, de los cuales el 40% poseen coche.
  - 10% de estudiantes de cuarto año, de los cuales el 60% poseen coche.
  - (a) Halla la probabilidad de que un estudiante en el dormitorio posea coche.
  - (b) Si un estudiante posee coche, encuentra la probabilidad de que el estudiante sea de tercer año.
  
- 3) De 1000 televidentes encuestados se obtiene la siguiente información:  
391 ven programas deportivos, 230 ven programas cómicos, 545 ven programas sobre el mundo animal, 98 ven programas cómicos y deportivos, 152 ven programas cómicos y mundo animal, 88 ven programas deportivos y mundo animal y 90 no ven ninguno de estos tres programas.
  - a) Elabora el diagrama de Venn
  - b) Si se elige al azar un televidente, calcula las siguientes probabilidades: Que vea sólo programas cómicos, que no vea ni programas deportivos ni sobre el mundo animal, que vea programas deportivos pero no cómicos, que vea programas deportivos o sobre el mundo animal.
  
- 4) Se realiza una encuesta a un total de 233 personas, de las cuales 159 son daltónicas y de ellas 36 no tienen los ojos verdes; mientras que de las no daltónicas, 12 sí que tienen los ojos verdes.
  - a) Construye la tabla de contingencia correspondiente.
  - b) Escribe el espacio muestral de este experimento.
  - c) Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:
    - Tener los ojos verdes

- No tener los ojos verdes
  - Tener los ojos verdes entre los daltónicos
  - Tener los ojos verdes entre los no daltónicos
  - No tener los ojos verdes entre los daltónicos
  - No tener los ojos verdes entre los no daltónicos
  - A la vista de estos resultados, si quieres no haber tenido los ojos verdes, ¿Qué crees que hubiese sido más aconsejable: ser daltónico o no daltónico? Razona tu respuesta
- 5) En una universidad en la que solo hay estudiantes de arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5% de arquitectura, el 10% de Ciencias y el 20% de Letras. Se sabe que el 20% estudian arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Eligiendo un estudiante al azar, se pide:
- a) Probabilidad de que sea de arquitectura y que haya terminado la carrera.
  - b) El estudiante ha terminado la carrera, calcula la probabilidad de que sea de Arquitectura.
- 6) Si dos sucesos son contrarios, ¿son compatibles o incompatibles? Pon un ejemplo.

## ANEXO II: ACTIVIDADES DE REFUERZO Y DE AMPLIACIÓN

### ACTIVIDADES DE REFUERZO

- 1) Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
  1. Lanzar tres monedas.
  2. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
  3. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
  4. El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.
- 2) Se lanza un dado dos veces. Considerar los sucesos A: *la suma de los resultados es 5*, B: *la diferencia de los resultados obtenidos es 1* y C: *el resultado de ambos lanzamientos es impar*. Describir el espacio muestral y los sucesos  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap C$ ,  $B \cap C$ ,  $(A \cup B) \cap C$ ,  $A - B$ ,  $B - C$ .
- 3) Un estudio sobre los diarios, A y B, que se distribuyen en los institutos de una determinada población, nos dice que el periódico A es leído por el 40% de los alumnos, mientras que el 30% lee el periódico B, y un 10% lee ambos diarios. Si de la citada población se elige un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que este no lea ninguno de los dos periódicos?
- 4) Sea la urna U (2B, 3N, 4R). Extraemos tres bolas, una a continuación de la otra. La primera es negra, la segunda no se mira y la tercera es blanca. Hallar la probabilidad de que la segunda sea roja.
- 5) En un colegio hay dos grupos de 25 alumnos de quinto curso y dos grupos de 20 alumnos de sexto curso. El 50 % de los alumnos de quinto no tienen faltas de ortografía, porcentaje que sube a 70% en los alumnos de sexto. En un concurso de redacción entre alumnos de quinto y sexto se elige una redacción al azar.
  - a) ¿Qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?
  - b) Si tiene faltas de ortografía, ¿qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?

6) Altube y Vitoria son dos estaciones meteorológicas. Representaremos por A y V el que llueva respectivamente en Altube y Vitoria durante cualquier periodo de 24 horas en el mes de Junio; se observa que  $P(A) = P(V) = 0,40$  y que  $P(A \cap V) = 0,28$ . Determinense las dos probabilidades condicionales  $P(A/V)$  y  $P(V/A)$ , así como la probabilidad total  $P(A \cup V)$ . ¿Son independientes A y V?

7) En una zona determinada, el negocio de telefonía móvil se reparte entre dos únicas compañías (A y B) y dos únicas marcas de teléfonos (M1 y M2). Sean los sucesos y sus probabilidades:

A= Un usuario utiliza la compañía A,  $P(A)=0,6$

B= Un usuario utiliza la compañía B,  $P(B)=0,4$

M1= Un usuario dispone de un teléfono de la marca M1,  $P(M1)=0,7$

M2= Un usuario dispone de un teléfono de la marca M2

C= Se produce un corte de un teléfono durante una llamada

Se sabe que la probabilidad de que un usuario cualquiera disponga de teléfonos de ambas marcas es de 0,3. La probabilidad de un corte en la comunicación es de 0,1 para los usuarios de la compañía A, 0,15 para la compañía B y de 0,05 para los de la marca M1.

a) Forman los sucesos A y B una partición del espacio muestral formado por el conjunto de usuarios?

b) Calcular  $P(C)$

c) Cual es la probabilidad de que un usuario disponga única y exclusivamente de un teléfono de la marca M2?

d) Se sabe que a un usuario se le ha cortado la comunicación, ¿Cuál es la probabilidad de que disponga de un teléfono de la marca M1?

e) Se sabe que un usuario no tiene un teléfono de la marca M1 ¿Cuál es la probabilidad de que se le corte la comunicación?

8) Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 8 azules.

a) Si elegimos al azar uno, ¿Cuál es la probabilidad de que sea rojo?

b) Si extraemos dos, ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?

c) Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo.

9) En una habitación se encuentran 210 personas de las cuales la mitad son mayores de edad y la tercera parte del total son mujeres, mientras los varones menores de edad representan el 40% del total. Calcule las siguientes probabilidades justificando a partir de los axiomas o teoremas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea mujer?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa habitación sea menor de edad o mayor de edad?



### ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN:

- 1) Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es  $0'6$ , la probabilidad de que pase la segunda es  $0'8$  y la de que pase ambas es  $0'5$ . Se pide:
  - a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.
  - b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
  - c) ¿Son ambas pruebas sucesos independientes?
  - d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.
  
- 2) En una muestra de 1.000 personas hay 300 que saben inglés, 100 que saben ruso y 50 ambos idiomas. Con estos datos averigua si son independientes o no los sucesos “saber inglés” y “saber ruso”.
  
- 3) La probabilidad de que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria es  $1/6$ , y en el caso de una niña es  $1/10$ . Si se toman al azar un niño y una niña, calcula las probabilidades siguientes:
  - a) Que los dos estudien una carrera universitaria.
  - b) Que ninguno de ellos estudie una carrera universitaria.
  - c) Que al menos uno de ellos estudie una carrera universitaria.
  
- 4) Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Se pide:
  - a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.
  - b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
  
- 5) De 100 personas que fueron consultadas sobre sus preferencias respecto de tres marcas de coches A, B y C, 50 han mostrado sus preferencias por A, 40 por B y 30 por C. Además, 25 personas mostraban preferencias por A y B, 15 por A y C y 12 por B y C. Por último, tan solo 5 personas mostraban preferencias por las tres marcas. El resto no sabe o no contesta. Forma el diagrama de Venn correspondiente a esta situación y, escogida una persona al azar, halla las siguientes probabilidades:
  - Preferencia por la marca A.
  - Preferencia por la marca A pero no por la marca B.
  - Preferencia por las tres marcas.
  - Preferencia por A y B pero no por C.
  
- 6) Los trabajadores de una gran empresa se distribuyen en tres áreas, A, B y C, en porcentajes respectivos de 55%, 25% y 20%. Durante un período de control se ha observado absentismo laboral en el 6% de los trabajadores del área A, en el 8% de los de B y en el 16% de los de C. ¿Cuál es el porcentaje global de absentismo? ¿Cómo se distribuyen por grupos los trabajadores absentistas?

- 7) En una exposición hay 20 obras, de las que 17 son originales. Un tratante selecciona una obra al azar y, antes de comprarla, pregunta a un experto sobre su autenticidad. Supongamos que el experto acierta en nueve de cada diez casos.
- Dado que el experto dice que la obra es auténtica, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente lo sea?
  - Si el experto dice que la obra es falsa, el visitante la devuelve y coge otra. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea un original?

### ANEXO III: ALGUNAS DE LAS TAREAS QUE INTERVIENEN EN LA UNIDAD DIDÁCTICA ANALIZADAS SEGÚN LOS INDICADORES USUALES

#### Enunciado de la tarea 1:

- En el experimento extraer una carta de la baraja describe un suceso seguro, un suceso imposible y el contrario de uno que tú elijas.
- Describe experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales son los siguientes:
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
  - $\Omega = \{R, A, V\}$
- Describir el espacio muestral asociado a cada uno de los experimentos siguientes:
  - Extraer, sin reemplazamiento, una a una dos bolas de una urna que contiene bolas rojas, verdes y blancas en número suficiente.
  - Lanzar una moneda hasta que aparezca cara.
  - Un dado es lanzado 5 veces consecutivas.
  - Extraer una carta de la baraja española.

#### Análisis de la tarea 1:

Objetivos	<p>2. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.</p> <p>3. Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.</p> <p>4. Identificar los sucesos seguro e imposible de un experimento aleatorio.</p> <p>5. Contruir el suceso contrario a uno dado.</p>
Contenidos	<p>Experimento aleatorio</p> <p>Espacio muestral</p> <p>Suceso seguro, imposible, contrario a uno dado.</p> <p>Notación correspondiente</p>

Sistemas de representación	Simbólico		
Situación/Contexto	Social. Científico		
C. D Competencias (complejidad)	PR (conexión)	M(reproducción)	LS(reproducción)
Tipo de secuencia de aprendizaje	De consolidación de los conocimientos adquiridos		

Enunciado de la tarea 2:

Complete la siguiente tabla:

Experimento:	Espacio muestral:	Suceso elemental	Suceso imposible:	Suceso compuesto :	Suceso contrario al dado:
Lanzamiento de un dado de 6 caras.	{1,2,3,4,5,6}	{2},{1}	{7}	{2,4,6}	{1,2,3}->{4,5,6}
Lanzamiento de 2 monedas.					{C,C}->
	{Rojo, verde, azul, negro}				Negro->
		Sota de bastos.			copas->

Análisis de la tarea 2:

Objetivos	<p>2. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.</p> <p>3. Expresar sucesos como conjuntos y viceversa.</p> <p>4. Identificar los sucesos seguro e imposible de un experimento aleatorio.</p> <p>5. Contruir el suceso contrario a uno dado.</p> <p>6. Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles.</p>
Contenidos	<p>Espacio muestral</p> <p>Suceso seguro, elemental, imposible, contrarios, compatibles e incompatibles.</p>

Sistemas de representación	Tabular. Simbólico		
Situación/Contexto	Social. Científico		
C. D Competencias (complejidad)	PR (reproducción)	RP(reproducción)	LS(reproducción)
Tipo de secuencia de aprendizaje	De consolidación de los conocimientos adquiridos		

Enunciado de la tarea 3:

Se lanza un dado dos veces. Considerar los sucesos A: *la suma de los resultados es 5*, B: *la diferencia de los resultados obtenidos es 1* y C: *el resultado de ambos lanzamientos es impar*. Describir:

- El espacio muestral
- Escribe con tus palabras lo que significan los sucesos:  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$ ,  $(A \cup B) \cap C$ ,  $A - B$ ,  $B - C$
- Construye los sucesos contrarios de A y C.
- ¿Son compatibles o incompatibles los sucesos A, B y C?
- Calcula las probabilidades de todos los sucesos anteriores.

Análisis de la tarea 3:

Objetivos	<p><i>2. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.</i></p> <p><i>5. Construir los sucesos contrarios a uno dado</i></p> <p><i>6. Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles.</i></p> <p><i>10. Comprender y usar la regla de Laplace.</i></p>		
Contenidos	<p><i>Unión de sucesos</i></p> <p><i>Intersección de sucesos</i></p> <p><i>Regla de Laplace</i></p> <p><i>Propiedades de la probabilidad</i></p>		
Sistemas de representación	Tabular. Simbólico		
Situación/Contexto	Científico. Verbal		
C. D Competencias (complejidad)	PR (reflexión)	M(conexión)	LS(reproducción)
Tipo de secuencia de aprendizaje	De desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas o conocimientos.		

#### Enunciado de la tarea 4:

● Mi hermana y yo decidimos hacer un juego para ganar dinero: lanzamos a la vez dos monedas al aire, si las dos monedas salen cara, mi hermana me tiene que pagar 5€, en otro caso, se los tengo que pagar yo a ella. Se repite la acción 10 veces y gana el que tenga más dinero.

- ¿Crees que es justo el procedimiento?
- ¿Qué jugador prefieres ser: mi hermana o yo?
- Si repitiéramos el juego 1000 veces, ¿Cuánto dinero crees que obtendríamos cada una?

● Un jugador lanza tres veces una moneda, si obtiene tres caras gana 100€, si obtiene una o dos caras gana 10€ y si no obtiene ninguna cara pierde 160€. ¿Es justo el juego?

#### Análisis de la tarea 4:

Objetivos	<i>13. Elaborar enunciados de problemas acorde con unos datos probabilísticos.</i> <i>16. Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den.</i> <i>17. Comprender y usar la regla del producto.</i>		
Contenidos	<i>Experimentos compuestos</i> <i>Probabilidad compuesta</i> <i>Diagramas de árbol</i> <i>Juegos de azar</i>		
Sistemas de representación	Simbólico		
Situación/Contexto	Personal		
C. D Competencias (complejidad)	PR (reflexión)	M(conexión)	C(conexión)
	AJ(conexión)	RP(reflexión)	R(reflexión)
Tipo de secuencia de aprendizaje	De desarrollo y aprendizaje de nuevos conocimientos (motivación inicial).		

#### Enunciado de la tarea 5:

Extraemos una carta de una baraja española.

- Halla la probabilidad de haber obtenido una figura de espadas sabiendo que la carta no es de copas.

- b) Halla la probabilidad de haber obtenido un rey sabiendo que no es de espadas.
- c) Halla la probabilidad de haber obtenido copas sabiendo que la carta es un rey.
- d) Halla la probabilidad de que sea figura sabiendo que ha salido un 3.
- e) Halla la probabilidad de que haya salido un 6 sabiendo que no ha salido figura.
- f) Halla la probabilidad de que haya salido el As de oros sabiendo que ha salido impar.

Análisis de la tarea 5:

Objetivos	<p><i>15. Distinción de sucesos dependientes e independientes.</i></p> <p><i>18. Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.</i></p>		
Contenidos	<p><i>Dependencia e independencia de sucesos</i></p> <p><i>Probabilidad condicionada</i></p>		
Sistemas de representación	Simbólico		
Situación/Contexto	Personal. Social		
C. D Competencias (complejidad)	PR(reproducción)	RP(conexión))	LS(conexión)
Tipo de secuencia de aprendizaje	De consolidación de los conocimientos adquiridos.		

Enunciado de la tarea 6:

El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio donde el 55 % de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40 % de los hombres votan al partido A y el 50 % al B. El 60 % de las mujeres votan al partido A y el 20 % al B. El resto de electores no vota.

- a) Realice la tabla de contingencia.
- b) Elegida una persona al azar, halla las siguientes probabilidades:
  - Que dicha persona no vote.
  - Que vote al partido A sabiendo que es mujer.
  - Que sea hombre sabiendo que ha votado al partido B.
  - Que sea mujer sabiendo que no ha votado.
  - Que no sea mujer.

Análisis de la tarea 6:

Objetivos	<p>15. <i>Distinción de sucesos dependientes e independientes.</i></p> <p>18. <i>Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada.</i></p> <p>19. <i>Expresar e interpretar datos de tablas de contingencia.</i></p>		
Contenidos	<p><i>Experimentos compuestos</i></p> <p><i>Tabla de contingencia</i></p> <p><i>Probabilidad condicionada</i></p> <p><i>Identificación de probabilidad en la vida cotidiana</i></p>		
Sistemas de representación	Simbólico. Gráfico		
Situación/Contexto	Personal. Social		
C. D Competencias (complejidad)	PR(reproducción)	RP(reproducción)	LS(reproducción)
	M(reproducción)	R(reproducción)	
Tipo de secuencia de aprendizaje	De autoevaluación.		

## ANEXO IV: ANÁLISIS DEL PROYECTO INDIVIDUAL

Los cuestionarios fueron pasados durante una de las sesiones de clase de la asignatura de matemáticas en los cursos de 1º y 2º bachillerato de la rama de Ciencias Sociales y Humanidades, durante el periodo de prácticas en el instituto.

En general, los errores más comunes que he detectado en el cuestionario por los alumnos de bachillerato, en relación a la noción del concepto de probabilidad y probabilidad condicionada, han sido los siguientes:

- Todos los alumnos, en el ítem 3, han respondido que es imposible determinar la altura de los hombres, ni de 3000, ni de 10, lo que lleva a suponer que encuentran dificultades para interpretar el concepto de probabilidad como límite, ya que ninguno ha interpretado que cuanto mayor sea la muestra, la altura tenderá a estabilizarse, mientras que en muestras pequeñas, la altura presentará más picos.
- Creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de cada uno de ellos por separado, lo que suele ocurrir cuando uno de los sucesos parece altamente probable, esto lleva a que los alumnos tengan en cuenta sólo este suceso y no son conscientes de que su intersección con otro suceso reduce su probabilidad. (Ej: ítem 6)

- Confusión a la hora de interpretar un enunciado teórico de probabilidad condicionada, cambiando los papeles del suceso condicionante y el condicionado, es decir, tienen dificultades para discriminar entre  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ . Por ejemplo, en el ítem 7, muchos de los alumnos confunden la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico, con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad.  
Puesto que una prueba de diagnóstico se diseña para detectar una cierta enfermedad, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es elevada. En cambio, la probabilidad de que una persona sana tenga un resultado positivo en la prueba es muy pequeña, y el alto número de personas sanas en la población hace que la probabilidad de estar enfermos si el test ha sido positivo no sea, en general, muy elevada.
- Otro de los errores comunes que he detectado en los alumnos de bachillerato con respecto a la relación de condicionalidad es que si el suceso condicionante ocurre después al suceso cuya probabilidad se quiere calcular, los alumnos se despistan y no identifican de forma adecuada el espacio muestral del experimento. Esto ocurre por ejemplo en el ítem 8, donde casi la totalidad de los alumnos han dado como respuesta 0'5, no teniendo en cuenta las bolas que caen en el orificio B.
- Por último, otro de errores o creencias incorrectas que aparece tiene que ver con la idea de independencia (íntimamente ligada a la probabilidad condicional): por ejemplo, en el ítem 9 se pregunta si dos sucesos son independientes. Casi la mitad de los que han realizado el cuestionario han respondido la opción a), lo que indica que confunden sucesos independientes con sucesos mutuamente excluyentes, lo cual no es así, ya que dos sucesos excluyentes son dependientes, porque uno de ellos no puede ocurrir cuando ocurre el otro. Un porcentaje menor contesta la opción b), la cual tampoco es correcta, ya que dichos alumnos tienen una concepción equivocada al piensan que dos sucesos que ocurren a la vez no pueden ser independientes.

Como conclusión de la encuesta realizada a los estudiantes de bachillerato, llego a la determinación de que no es fácil el estudio de este tema, ya que hay que tener en cuenta muchos aspectos que a los alumnos les cuesta trabajo, como puede ser la dificultad para visualizar el espacio muestral, la confusión entre independencia y exclusión, el cambio de términos de la probabilidad condicional y el error de considerar la conjunción de sucesos como más representativa o probable que la de cada suceso por separado (simple).

Los profesores de matemáticas que se vayan a dedicar a enseñar probabilidad han de ser conscientes de esta problemática, para comprender algunas dificultades y errores que pueden cometer sus alumnos. Por eso, considero muy importante que en esta unidad didáctica se presente a los estudiantes el mayor número posible de aplicaciones prácticas en la vida real, en el mundo cotidiano, proponiendo situaciones interactivas y usando las nuevas tecnologías para facilitar el aprendizaje, de esta forma creo que se puede fomentar la motivación del alumnado y principalmente evitar este tipo de errores y creencias incorrectas.

A continuación, en el siguiente diagrama muestro el porcentaje de personas que han contestado correctamente a cada uno de los ítems:



